Musterlösung Serie 7

Dualraum

1. Betrachten Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3i \\ 3 & 8 & -8i \\ 3i & 8i & 7 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie $S_1 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $S_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, so dass $S_1^T A S_1$ und $S_2^T B \bar{S}_2$ diagonal sind.

Hinweis: Sie müssen hier keine Eigenwerte berechnen; verwenden Sie elementare Zeilen- und Spaltenumformungen.

Lösung:

Wir addieren das $\frac{1}{2}$-fache der zweiten Spalte zur dritten Spalte. Wir verfahren entsprechend für die Zeilen und erhalten

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun subtrahieren wir das 2-fache der zweiten Spalte von der ersten. Entsprechend für die Zeilen. Wir erhalten die Diagonalmatrix

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenden wir die gleichen Spaltenumformungen auf die Einheitsmatrix E_3 an, erhalten wir

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass $S_1^T A S_1 = D_1$.

Für die Matrix B verfahren wir analog wie oben. Wir addieren das i-fache der zweiten Spalte zur dritten Spalte und entsprechend für die Zeilen. Anschließend subtrahieren wir das 3-fache der ersten Spalte von der zweiten Spalte und entsprechend für die Zeilen. Wir erhalten die Matrizen

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass $\bar{S}_2^T B S_2 = D_2$. Wir erhalten die gesuchte Matrix nun als $\bar{S}_2$.

2. Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s\colon V \times V \to K$ eine alternierende Bilinearform, d.h. $s(v,v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass

$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die alternierende Bilinearform s ist also durch nur eine Zahl, den Rang, charakterisiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Zeigen Sie, dass entweder $s = 0$ oder zwei linear unabhängige Vektoren u, v existieren mit $s(u,v) = 1$.

(b) Zeigen Sie die gewünschte Aussage mit Induktion über $n = \dim V$. Betrachten Sie dazu den Untervektorraum

$$W = \{w \in V \mid s(u,w) = s(v,w) = 0\}$$

und zeigen Sie insbesondere, dass $V = \operatorname{span}(u,v) \oplus W$.

Bemerkung: Eine alternierende Bilinearform ist auch schiefsymmetrisch, denn

$$0 = s(v+w, v+w) = s(v,v) + s(v,w) + s(w,v) + s(w,w) = 0 + s(v,w) + s(w,v) + 0\,.$$

Falls $\operatorname{char}(K) \neq 2$ *ist alternierend äquivalent zu schiefsymmetrisch.*

Lösung:

(a) Wir nehmen an, $s \neq 0$. Seien also $u, v' \in V$ mit $s(u,v') \neq 0$. Dann sind u, v' linear unabhängig, denn falls $v' = \lambda u$, so wäre $s(u,v') = \lambda s(u,u) = 0$. Setzen wir $v = \frac{1}{s(u,v')} \cdot v'$ dann ist $s(u,v) = 1$.

(b) Wir zeigen, dass $V = \operatorname{span}(u,v) \oplus W$. Angenommen, $w \in \operatorname{span}(u,v) \cap W$, dann ist $w = au + bv$ und

$$a = -s(v,w) = 0\,, \quad b = s(u,w) = 0\,,$$

also $w = 0$. Wir zeigen noch, dass u, v und W zusammen ganz V aufspannen. Für $x \in V$ sei $y = x - s(u,x)v + s(v,x)u$ dann ist

$$s(u,y) = s(u,x) - s(u,x)s(u,v) = 0\,, \quad s(v,y) = s(v,x) + s(v,x)s(v,u) = 0\,,$$

also $y \in W$.

Man bemerke, dass die darstellende Matrix von s auf $\operatorname{span}(u, v)$ genau $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Die Einschränkung von s auf W definiert wieder eine alternierende Bilinearform und unsere Behauptung folgt per Induktion.

3. Sei V ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:

   (a) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$,

   (b) $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$,

   (c) falls V endlich dimensional ist, dann ist $W_1^0 + W_2^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.

   Bemerkung: Für V unendlich dimensional gilt in (b) i.A. keine Gleichheit.

   Lösung:

   (a)
$$\begin{aligned} \varphi \in (W_1 + W_2)^0 &\iff \forall w_1 + w_2 \in W_1 + W_2 : \varphi(w_1 + w_2) = 0 \\ &\iff \forall w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 : \varphi(w_1) = \varphi(w_2) = 0 \\ &\iff \varphi \in W_1^0 \cap W_2^0 \,. \end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned} \varphi \in W_1^0 + W_2^0 &\implies \exists \varphi_1 \in W_1^0, \varphi_2 \in W_2^0 : \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \\ &\implies \forall u \in W_1 \cap W_2 : \varphi(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u) = 0 \\ &\implies \varphi \in (W_1 \cap W_2)^0 \,. \end{aligned}$$

   (c) Für V endlich dimensional ist $\dim W^0 = \dim V - \dim W$. Zusammen mit $\dim V = \dim V^*$ folgt hieraus, dass in (b) beide Vektorräume von gleicher Dimension und folglich gleich sind:

$$\begin{aligned} \dim W_1^0 + W_2^0 &= \dim V^* - \dim(W_1^0 \cap W_2^0) \overset{(a)}{=} \dim V^* - \dim(W_1 + W_2)^0 \\ &= \dim(W_1 + W_2) = \dim V - \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1 \cap W_2)^0 \,. \end{aligned}$$

4. Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ der Vektorraum der reellen Polynome von Grad $\leqslant 2$. Für $p \in V$ definieren wir

$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt \,, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(t)dt \,, \quad f_3(p) = \int_0^{-1} p(t)dt \,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear sind, also Elemente des Dualraums V^* definieren.

   (b) Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 eine Basis von V^* bilden.

   Lösung:

(a) Hier ist nichts zu zeigen: Aus der Linearität des Integrals folgt direkt, dass die f_i linear sind.

(b) Wir wissen, dass $\dim V = 3$, da bspw. $1, t, t^2$ eine Basis ist. Folglich ist auch $\dim V^* = 3$. Es genügt also zu zeigen, dass die f_i linear unabhängig sind. Wir nehmen hierzu an, es gäbe eine Linearkombination

$$af_1 + bf_2 + cf_3 = 0\,.$$

Wir wählen $p(t) = 1$ und erhalten

$$a + 2b - c = 0\,.$$

Analog ergibt $p(t) = 2t$, dass

$$a + 4b + c = 0\,,$$

und $p(t) = 3t^2$ ergibt

$$a + 8b - c = 0\,.$$

Man überzeugt sich direkt, dass die drei Gleichungen $a = b = c = 0$ implizieren (z.B. mittels Gauß Verfahren auf Zeilenstufenform bringen).

5. Betrachten Sie den Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^4$ aufgespannt durch

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Matrix A mit $\mathrm{Ker}(A) = W$.

Lösung: Die beiden Vektoren sind linear unabhängig und bilden eine Basis von W. Sei $V = \mathbb{R}^4$. Die Inklusion $W \subset V$ hat bzgl. der Standardbasis von V die darstellende Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \\ 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Die darstellende Matrix der dualen Abbildung $V^* \to W^*$ bzgl. der dualen Basen ist also B^T. Wir berechnen den Kern der Matrix B^T mittels Gauß Verfahren. Eine Basis des Kerns berechnet sich leicht als

$$(1, -3, 0, 2)^T\,, \quad (-4, 3, 3, 0)^T\,.$$

Bezeichnen wir mit A^T die Matrix mit obigen Vektoren als Spalten, so beschreibt A^T die Abbildung $\big(V/W\big)^* \to V^*$ (dies ist genau die Inklusion des Annullators

$W^0 \subset V^*$). Folglich ist $A = (A^T)^T$ die darstellende Matrix der Projektion $V \to V/W$, dessen Kern gerade W ist, also

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 2 \\ -4 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$