Musterlösung Serie 8

Adjungierte Abbildung

1. Berechnen Sie jeweils die adjungierte Abbildung F^{ad} zu F:

   (a) Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 10}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 10$ mit Skalarprodukt
   $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$
   und sei
   $$F(p) = \frac{d}{dt}((1-t^2)p')\,.$$
   Zusatz: Was schließen Sie für die Eigenvektoren und Eigenwerte von F? Sie können auch zeigen, dass die Eigenvektoren von F gerade die Legendre Polynome der Serie 4 sind.

   (b) $F = \frac{d}{dt}$ mit $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$, mit dem Skalarprodukt von (a).

   (c) Sei wieder $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 10}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 10$, aber jetzt mit Skalarprodukt
   $$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$$
   und sei $F \in \mathrm{End}(V)$, so dass
   $$F(p) = tp'' + (1-t)p'\,.$$

   (d) * Wir betrachten nun ein unendlich dimensionales Beispiel, auch wenn dies in der Vorlesung streng genommen nicht behandelt wurde. Seien nun V die polynomialen Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und W die polynomialen Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sei das Skalarprodukt auf V und W jeweils gegeben durch
   $$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)^T g(x) e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} d^3x\,.$$
   Sei $F = \nabla \in \mathrm{Hom}(V, W)$ der Gradient, also $F(p) = grad(p) = \nabla p$. Zeige, dass die Abbildung $F^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ definiert durch $F^{\mathrm{ad}}(q)(x) = -div(q)(x) + x^T q(x)$ für alle $p \in V$, $q \in W$, $x \in \mathbb{R}^3$ erfüllt:
   $$\langle F(p), q\rangle_W = \langle p, F^{\mathrm{ad}}(q)\rangle_V\,.$$

(e) Sei nun $V = \mathbb{C}^n$ mit Skalarprodukt gegeben durch eine hermitesche positiv definite Matrix A (also $\langle x, y\rangle = x^T A\bar{y}$) und $F \in \mathrm{End}(V)$ gegeben durch eine beliebige Matrix $B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$.

Bemerkung: Für (b) kann es sinnvoll sein, zuerst (e) zu lösen. Für (a), (c) ist die Einschränkung des Grades der Polynome eigentlich unerheblich, Sie können auch mit dem unendlich dimensionalen Vektorraum aller Polynome arbeiten, oder mit ausreichend differenzierbaren Funktionen. Für (b) können Sie allgemeiner auch alle Polynome vom Grad $\leqslant N$ nehmen, die Aufgabe wird dann allerdings schwieriger.

Lösung:

(a) Wir nutzen (zweimal) partielle Integration:

$$\begin{aligned}\langle F(f), g\rangle &= \int_{-1}^{1}((1-t^2)f'(t))'g(t)dt = -\int_{-1}^{1}((1-t^2)f'(t))g'(t)dt \\ &= +\int_{-1}^{1} f(t)((1-t^2)g'(t))'dt = \langle f, F(g)\rangle\,,\end{aligned}$$

Hierbei verschwinden die Randterme in der partiellen Integration jeweils, da $1-t^2$ in $t = \pm 1$ verschwindet. Also ist $F^{ad} = F$, also F selbstadjungiert. Also ist insbesondere F diagonalisierbar, mit reellen Eigenwerten, und V hat eine ONB aus Eigenvektoren von F. Ausserdem ist der Raum der Polynome von Grad $\leqslant N$, $V_N = \mathbb{R}[t]_{\leqslant N}$, offensichtlich invariant unter F für alle N, da F zwei Ableitungen enthält, und höchstens eine Multiplikation mit t^2. Wir können also induktiv die ONB $p_0, \ldots, p_N$ (von V_N) aus Eigenvektoren von F so wählen, so dass $\deg p_j = j$. Da die Orthonormalität und die Gradbedingung auch die durch das Gram-Schmidt Verfahren gewonnene Basis eindeutig (bis auf Vorfaktor) charakterisieren, müssen die beiden ONB übereinstimmen, allenfalls bis auf unerhebliche Vorfaktoren, die man auf 1 setzen kann. Insbesondere müssen die Legendre Polynome der Serie 4 gerade eine Eigenbasis von F bilden. Man beachte, dass das letzte Argument nicht die explizite Form des Skalarproduktes oder von F verwendet, und man kann es analog für alle Systeme von klassischen orthogonalen Polynomen verwenden.

Man kann aber auch explizit nachrechnen, dass mit

$$p_n(t) = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

gilt:

$$F(p_n) = (1-t^2)p_n'' - 2tp_n' = -n(n-1)p_n.$$

Zunächst gilt nämlich

$$(1-t^2)\frac{d}{dt}(t^2-1)^n = (1-t^2)2nt(t^2-1)^{n-1}\,.$$

Durch $n+1$-faches Differenzieren erhalten wir dann

$$(1-t^2)\frac{d^{n+2}}{dt^{n+2}}(t^2-1)^n + \binom{n+1}{1}(-2t)\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(t^2-1)^n + \binom{n+1}{2}(-2)\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$
$$= -2nt\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}(t^2-1)^n + \binom{n+1}{1}(-2n)\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n\,,$$

woraus folgt

$$(1-t^2)p_n'' - 2tp_n' + n(n-1)p_n = 0\,.$$

(b) *Lösung für allgemeine N:* Sei allgemein $p_0,\ldots,p_N$ eine ONB von V_N, und $\ell \in V_N^*$ eine Linearform. Dann gilt, wie in der Vorlesung, für alle $x \in V_N$

$$\ell(x) = \sum_{j=0}^N \langle x, p_j\rangle l(p_j).$$

Insbesondere können wir $\ell = ev_{t_0}$ nehmen, die Evaluation in $t = t_0$, und erhalten

$$p(t_0) = \sum_{j=0}^N \langle p, p_j\rangle p_j(t_0).$$

Seien nun

$$p_n = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n$$

die normalisierten Legendre Polynome, so dass $\langle p_i, p_j\rangle = \delta_{ij}$. Dann gilt

$$p_n(1) = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} \qquad\qquad p_n(-1) = (-1)^n\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}},$$

denn jede der n Ableitungen muss genau einen der n Faktoren (t^2-1) “treffen”, da diese sonst in ± 1 verschwinden.

Nun gilt also für beliebige $p, q \in V_N$, wieder mit partieller Integration und der Formel für die Evaluation in $t_0 = \pm 1$ oben

$$\langle F(p), q\rangle = \int_{-1}^1 p'q\,dt = p(1)q(1) - p(-1)q(-1) - \int_{-1}^1 pq'\,dt$$
$$= \langle p, q(1)\sum_{j=0}^N p_j p_j(1)\rangle - \langle p, q(-1)\sum_{j=0}^N p_j p_j(-1)\rangle - \langle p, q'\rangle.$$

Also ist

$$F^{ad}(q) = -q' + q(1)p_+ - q(-1)p_-$$

mit

$$p_\pm := \sum_{j=0}^N p_j(\pm 1)p_j = \sum_{j=0}^N (\pm 1)^j\frac{\sqrt{2j+1}}{\sqrt{2}}p_j = \sum_{j=0}^N (\pm 1)^j\frac{2j+1}{2^{j+1}j!}\frac{d^j}{dt^j}(t^2-1)^j.$$

Im gefragten Beispiel ist $N = 2$, wir erhalten also

$$p_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}t + \frac{5}{2}\frac{1}{2}(3t^2 - 1) = \frac{15}{4}t^2 \pm \frac{3}{2}t - \frac{3}{4}.$$

Also konkret,

$$\begin{aligned} F^{ad}(1) &= p_+ - p_- = 3t \\ F^{ad}(t) &= -1 + p_+ + p_- = \frac{15}{2}t^2 - \frac{5}{2} \\ F^{ad}(t^2) &= -2t + p_+ - p_- = t \end{aligned}$$

Alternative Lösung für $N = 2$: Die Matrix des Skalarproduktes bzgl. der Standardbasis $1, t, t^2$ ist

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Somit ist (mit einem der Rechenverfahren für die Inverse)

$$A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & 12 & 0 \\ -15 & 0 & 45 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von F ist

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix von der adjungierten Abbildung ist also (siehe (e)):

$$\begin{aligned} A^{-1}B^TA &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & 12 & 0 \\ -15 & 0 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 9 & 0 & -15 \\ 0 & 12 & 0 \\ -15 & 0 & 45 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & -20 & 0 \\ 24 & 0 & 8 \\ 0 & 60 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Bemerke zunächst, dass $F(p) = (tp'e^{-t})'e^t$. Dies vereinfacht die folgende

Rechnung (mit partieller Integration)

$$\begin{aligned}\langle F(f), g\rangle &= \int_0^\infty (tf'e^{-t})'g dt\\ &= -\int_0^\infty f'tg'e^{-t}dt\\ &= \int_0^\infty f(tg'e^{-t})'dt\\ &= \langle f, F(g)\rangle\,.\end{aligned}$$

Daher ist $F^{\mathrm{ad}} = F$, F ist also selbstadjungiert. Die Randterme in der partiellen Integration treten hier nicht auf, da immer mindestens ein t im Integrand steht, das die Randterme verschwinden lässt.

Bemerkung: Mit der gleichen Argumentation wie in (a) ist also eine Eigenbasis von F gegeben durch die aus der Standardbasis $1, t, t^2, \ldots$ durch Gram-Schmidt gewonnene ONB. Die entsprechenden orthogonalen Polynome sind die Laguerre Polynome (bis auf Normierung).

(d) Die Aufgabe ist nicht so schwierig, benötigt aber den Satz von Gauss aus der Analysis. Mit diesem berechnen wir

$$\begin{aligned}0 = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(fge^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}) &= \int_{\mathbb{R}^3}((\nabla f)\cdot ge^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} + f\nabla\cdot(ge^{-\frac{1}{2}\|x\|^2}))\\ &= \langle \nabla f, g\rangle + \langle f, (\nabla\cdot(ge^{-\frac{1}{2}\|x\|^2})e^{+\frac{1}{2}\|x\|^2})\rangle.\end{aligned}$$

Der Randterm links ist 0, da die Exponentialfunktion im Unendlichen schneller als jedes Polynom fällt. Also ist

$$F^{ad}(g) = -(\nabla\cdot(ge^{-\frac{1}{2}\|x\|^2})e^{+\frac{1}{2}\|x\|^2} = -\nabla\cdot g + g\cdot x. = -divg + g\cdot x$$

Bemerkung: Rechnungen mit Vektorfelder, Gradient und Divergenz und dem Satz von Gauss wie hier sind im späteren Studium sehr wichtig und allgegenwärtig, insbesondere auch in der Physik. Sie sollten dies bis zum Ende des Semester sehr gut beherrschen. Falls Sie die Grundlagen dafür noch nicht in der Analysis Vorlesung hatten, kommen Sie doch beim Lernen für die Prüfung nochmal auf diese Aufgabe zurück.

(e) Sei $\langle x, y\rangle_A = x^T A\bar{y}$ und $\langle x, y\rangle = x^T\bar{y}$, dann ist für alle x, y

$$\langle x, By\rangle_A = \langle A^T x, By\rangle = \langle \bar{B}^T A^T x, y\rangle = \langle (A^T)^{-1}\bar{B}^T A^T x, y\rangle_A\,,$$

und daher $(A^T)^{-1}\bar{B}^T A^T$ die Adjungierte zu B bzgl. $\langle,\rangle_A$.

2. Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum und $W \subset \mathrm{End}(V)$ ein Untervektorraum mit den Eigenschaften

(i) $F \in W \implies F^{\mathrm{ad}} \in W$, d.h. W ist $(-)^{\mathrm{ad}}$-invariant,

(ii) $F, G \in W \implies FG = GF$.

Zeigen Sie: Dann gibt es eine ONB $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ von V und lineare Funktionen $\lambda_j \colon W \to \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, n$, so dass für alle $F \in W$ und j gilt

$$F(v_j) = \lambda_j(F) v_j \,.$$

Das heißt also, die Basis besteht aus gemeinsamen Eigenvektoren der Endomorphismen in W.

Lösung:

Aus den beiden Bedingungen (i) und (ii) folgt, dass alle $F \in W$ normal sind. Sei $\{F_i\}$ eine Basis von W. Nach Spektralsatz existiert eine ONB aus Eigenvektoren von F_i. Da alle F_i kommutieren, können wir sogar eine ONB $(v_1, \dots, v_n)$ aus gemeinsamen Eigenvektoren wählen (siehe Lineare Algebra I). Seien μ_{ij} die Eigenwerte, also

$$F_i(v_j) = \mu_{ij} v_j \,.$$

Die gesuchten linearen Abbildungen λ_j sind dann durch

$$\lambda_j(F_i) = \mu_{ij}$$

wohldefiniert, da die F_i eine Basis bilden.

3. Seien V, W endlich dimensionale euklidische Vektorräume.

   (a) Sei weiter $F \colon V \to W$ linear und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Dann gilt

   $$F^{\mathrm{ad}}(U^\perp) = (F^{-1}U)^\perp \,.$$

   (b) Sei nun $F \colon V \to V$ selbstadjungiert. Dann gilt für alle Untervektorräume $U \subset V$

   $$F(U^\perp) = (F^{-1}U)^\perp \,.$$

   Gilt die Umkehrung?

Lösung:

(a) Die Aussage folgt aus Satz 6.2.3 (zusammen mit der Definition von F^{ad}). Äquivalent: Für alle $w \in U^\perp$ und $v \in F^{-1}U$ ist

$$\langle v, F^{\mathrm{ad}} w \rangle = \langle Fv, w \rangle = 0 \,,$$

daher $F^{\mathrm{ad}}(U^\perp) \subset (F^{-1}U)^\perp$ und Gleichheit unter Verwendung der Dimensionsformeln. Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\dim V &= \dim \mathrm{Ker}(F) + \dim \mathrm{Im}(F)\,,\\
\dim U^\perp &= \dim(\mathrm{Ker}F^{\mathrm{ad}} \cap U^\perp) + \dim F^{\mathrm{ad}}(U^\perp)\,,\\
\dim F^{-1}U &= \dim \mathrm{Ker}(F) + \dim(\mathrm{Im}(F) \cap U)\,,\\
\dim(U) + \dim \mathrm{Im}(F) &= \dim(U + \mathrm{Im}(F)) + \dim(U \cap \mathrm{Im}(F))\,,\\
\dim U + \dim U^\perp &= \dim W\,, \quad \dim F^{-1}U + \dim(F^{-1}U)^\perp = \dim V\,.
\end{aligned}$$

Außerdem ist $\mathrm{Ker}F^{\mathrm{ad}} = (\mathrm{Im}F)^\perp$ und $(U^\perp \cap \mathrm{Im}(F)^\perp) = (U + \mathrm{Im}(F))^\perp$ und daher insgesamt

$$\begin{aligned}
\dim F^{\mathrm{ad}}(U^\perp) &= \dim U^\perp - \dim(\mathrm{Ker}(F^{\mathrm{ad}}) \cap U^\perp) = \dim U^\perp - \dim(U^\perp \cap \mathrm{Im}(F)^\perp)\\
&= \dim W - \dim U + \dim(U + \mathrm{Im}(F)) - \dim W\\
&= \dim \mathrm{Im}(F) - \dim(\mathrm{Im}(F) \cap U)\\
&= \dim V - (\dim \mathrm{Ker}(F) + \dim(\mathrm{Im}(F) \cap U)) = \dim V - \dim F^{-1}U\\
&= \dim(F^{-1}U)^\perp\,.
\end{aligned}$$

(b) Da nun $F = F^{\mathrm{ad}}$ folgt die Aussage direkt nach (a). Die Umkehrung gilt nicht: Man betrachte bspw. eine anti-selbstadjungierte Abbildung $F \neq 0$.

4. Betrachten Sie zwei windschiefe Geraden $L = v + w\mathbb{R}$ und $L' = v' + w'\mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^n$ Sei weiterhin

$$d(L, L') = \min(\|u' - u\| \mid u \in L, u' \in L')$$

der Abstand zwischen L und L'. Bestimmen Sie $d(L, L')$ unter Verwendung der Differentialrechnung.

Lösung:

Seien o.B.d.A. w und w' normiert und sei

$$\begin{aligned}
\delta(\lambda, \lambda') &= \|v' + \lambda' w' - v - \lambda w\|\\
&= \lambda^2 - 2\langle w, w'\rangle \lambda\lambda' + \lambda'^2 + 2(\langle v, w\rangle - \langle v', w\rangle)\lambda + 2(\langle v', w'\rangle - \langle v, w'\rangle)\lambda'\\
&\quad + \|v\|^2 + \|v'\|^2 - 2\langle v, v'\rangle\,.
\end{aligned}$$

Wir bestimmen ein lokales Minimum von δ durch die zwei Bedingungen

- $\nabla\delta = 0$,
- $\mathrm{Hess}(\delta)$ positiv definit.

Man berechnet die Ableitungen als

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} &= 2\lambda - 2\langle w, w'\rangle\lambda' + 2(\langle v, w\rangle - \langle v', w\rangle)\,,\\
\frac{\partial\delta}{\partial\lambda'} &= 2\lambda' - 2\langle w, w'\rangle\lambda + 2(\langle v', w'\rangle - \langle v, w'\rangle)\,,
\end{aligned}$$

und die Hess'sche als

$$\mathrm{Hess}(\delta) = \begin{pmatrix} 2 & -2\langle w, w'\rangle \\ -2\langle w, w'\rangle & 2 \end{pmatrix} .$$

Da w und w' normiert sind ist $-1 < \langle w, w'\rangle < 1$ und somit $\det \mathrm{Hess}(\delta) = 4 - 4\langle w, w'\rangle^2 > 0$. Auch der erste Hauptminor ist positiv $(2 > 0)$ und somit $\mathrm{Hess}(\delta)$ positiv definit.

Aus der ersten Bedingung berechnen wir nun die Lösung

$$\lambda = \frac{ac + b}{1 - a2}\,, \quad \lambda' = \frac{ab + c}{1 - a^2}\,,$$

wobei

$$a = \langle w, w'\rangle\,, \quad b = \langle v', w\rangle - \langle v, w\rangle\,, \quad c = \langle v, w'\rangle - \langle v', w'\rangle\,.$$

Unser lokales Minimum ist aber auch globales Minimum, da $\delta \to \infty$ für $\lambda \to \infty$ oder $\lambda' \to \infty$. Da $d = \delta^2$ haben wir also $d(L, L')$ gefunden.

5. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $F^* \in \mathrm{End}(V^*)$ die duale Abbildung. Zeigen Sie, dass für charakteristisches Polynom und Minimalpolynom gilt:

$$p_F(t) = p_{F^*}(t)\,, \qquad m_F(t) = m_{F^*}(t)\,.$$

Lösung: Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V und $\mathcal{B}^*$ die assoziierte duale Basis von V^*. Dann ist

$$M_{\mathcal{B}^*}(F^*) = M_{\mathcal{B}}(F)^T\,.$$

Die Aussage folgt nun, da transponierte Matrizen stets das gleiche char. Polynom und Minimalpolynom haben.