Musterlösung Serie 9

Tensorprodukt

1. Für K-Vektorräume V, V', W, W' sowie Homomorphismen $F\colon V \to V'$ und $G\colon W \to W'$ definieren wir das Tensorprodukt von F und G durch:

$$F \otimes G\colon V \otimes W \to V' \otimes W'\,, v \otimes w \mapsto F(v) \otimes G(w)\,.$$

Zeigen Sie:

(a) Hierdurch ist eine K-lineare Abbildung definiert

$$\mathrm{Hom}_K(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_K(W, W') \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W').$$

(b) Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die Abbildung ein Isomorphismus.

Lösung:

(a) Zunächst zeigen wir, dass obige Vorschrift eine lineare Abbildung $F \otimes G$ definiert. Äquivalent ist zu zeigen, dass

$$V \times W \to V' \otimes W'\,, v \times w \mapsto F(v) \otimes G(w)$$

eine bilineare Abbilldung definiert. Wir zeigen Linearität im ersten Argument, es folgt dann analog für das zweite Argument. Seien $u, v \in V$, $w \in W$, $\lambda \in K$, dann ist

$$F(u + \lambda v) \otimes G(w) = \big(F(u) + \lambda F(v)\big) \otimes G(w) = F(u) \otimes + \lambda F(v) \otimes G(w)\,.$$

Seien nun $F_1, F_2 \in \mathrm{Hom}_K(V, V')$, $G \in \mathrm{Hom}_K(W, W')$, $\mu \in K$, dann ist

$$(F_1 + \mu F_2) \otimes G(v \otimes w) = (F_1 + \mu F_2)(v) \otimes G(w) = F_1(v) \otimes G(w) + \mu F_2(v) \otimes G(w)\,.$$

Linearität im zweiten Argument folgt erneut analog.

(b) Seien nun alle Vektorräume endlich-dimensional. Wir zeigen Surjektivität der Abbildung und argumentieren anschließend mittels Dimension. Zunächst folgendes Lemma:
Seien nun $\{v_i\}$, $\{w_j\}$, $\{v'_k\}$, $\{w'_\ell\}$ Basen von V, W, V' bzw. W'. Dann bilden $\{v_i \otimes w_j\}$, $\{v'_k \otimes w'_\ell\}$ Basen von $V \otimes W$ bzw. $V' \otimes W'$. Eine Basis von $\mathrm{Hom}(V \otimes W, V' \otimes W')$ ist gegeben durch

$$f_{ijk\ell}(v_a \otimes w_b) = \delta_{ai}\delta_{bj} v'_k \otimes w'_\ell\,.$$

Definieren wir analog

$$F_{ik}(v_a) = \delta_{ai} v'_k\,, \quad G_{j\ell}(w_b) = \delta_{bj} w'_\ell\,,$$

dann ist gerade $F_{ik} \otimes G_{j\ell} = f_{ijk\ell}$ und die Abbildung ist somit surjektiv. Da dies eine Bijektion auf Basen definiert ist die Abbildung ein Isomorphismus. Äquivalent: die Dimension beider Vektorräume stimmt übereint ($= \dim V \cdot \dim V' \cdot \dim W \cdot \dim W'$).

2. Seien U, V, W, Z endlich dimensionale K-Vektorräume, $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $B \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ und betrachten Sie die lineare Abbildung[1]

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, Z)\,, F \mapsto B \circ F \circ A\,.$$

Zeigen Sie, dass unter der Identifikation $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ aus der Vorlesung Ψ identifiziert werden kann mit dem Homomorphismus

$$\Phi\colon V^* \otimes W \to U^* \otimes Z\,, \quad \Phi = A^* \otimes B\,,$$

wobei A^* die zu A duale Abbildung ist.

Lösung:

Wir erinnern an die Identifikation

$$f_{V,W}\colon V^* \otimes W \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W)\,, \quad \varphi \otimes w \mapsto \varphi(\,) \cdot w\,.$$

Wir wollen also argumentieren, dass folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} V^* \otimes W & \xrightarrow{\Phi} & U^* \otimes Z \\ \big\downarrow{\scriptstyle f_{V,W}} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{U,Z}} \\ \mathrm{Hom}(V, W) & \xrightarrow{\Psi} & \mathrm{Hom}(U, Z)\,. \end{array}$$

Seien $u \in U$ und $\varphi \otimes w \in V^* \otimes W$. Da $V^* \otimes W$ von Tensoren der Form $\varphi \otimes w$ erzeugt wird, genügt es die Behauptung hierfür zu zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned} \big((\Psi \circ f_{V,W})(\varphi \otimes w)\big)(u) &= \big(B \circ f_{V,W}(\varphi, w) \circ A\big)(u) \\ &= B\big((\varphi \circ A)(u) \cdot w\big) \\ &= \varphi(A(u)) \cdot B(w) \\ &= A^*(\varphi)(u) \cdot B(w) \\ &= f_{U,Z}\big((A^* \otimes B)(\varphi \otimes w)\big)(u) \\ &= \big((f_{U,Z} \circ \Phi)(\varphi \otimes w)\big)(u)\,. \end{aligned}$$

[1] Wir verzichten bei “Hom” von nun an häufig auf den Tiefsatz “K”.

3. Sei V ein K-Vektorraum. Konstruieren Sie einen K-Vektorraum $V \vee V$, das *symmetrische Produkt*, zusammen mit einer K-linearen Abbildung $\vee$

$$\vee\colon V \times V \to V \vee V\,,$$

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: zu jedem K-Vektorraum W zusammen mit einer symmetrischen Abbildung $\xi\colon V \times V \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee$, so dass $\xi = \xi_\vee \circ \vee$. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist durch $v_i \vee v_j$ für $i \leqslant j$ eine Basis von $V \vee V$ gegeben. Insbesondere ist

$$\dim V \vee V = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}\,.$$

Lösung:

Sei $U = \operatorname{span}\{v \otimes v' - v' \otimes v \mid v, v' \in V\} \subset V \otimes V$. Wir definieren das symmetrische Produkt $V \vee V$ als den Quotientenvektorraum

$$V \vee V = \big(V \otimes V\big)/U\,.$$

Die universelle Eigenschaft folgt nun direkt aus der universellen Eigenschaft des Quotienten: Die bilineare Abbildung ξ induziert eine eindeutige Abbildung $\xi'\colon V \otimes V \to W$, so dass ξ genau die Komposition $V \times V \to V \otimes V \to W$ ist. Symmetrie der Abbildung ξ bedeutet gerade, dass $U \subset \operatorname{Ker}(\xi')$.

Um die Behauptung bzgl. der Basis zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass

$$U = \operatorname{span}\{v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i \mid i < j\}\,.$$

Sei $\tilde{U} = \operatorname{span}\{v_i \otimes v_j\}_{i \leqslant j} \subset V \otimes V$. Es genügt zu zeigen, dass $U \oplus \tilde{U} = V \otimes V$. Dann bildet $\tilde{U}$ isomorph auf $V \vee V$ ab und die Bilder der $v_i \otimes v_j$ bilden eine Basis des Quotienten.

Nun ist für $i \leqslant j$ aber $v_j \otimes v_i = -(v_i \otimes v_j - v_j \otimes v_i) + v_i \otimes v_j \in U + \tilde{U}$, also ist die Basis $\{v_i \otimes v_j\}_{i,j}$ von $V \otimes V$ komplett in $U + \tilde{U}$ enthalten und folglich $U + U' = V \otimes V$. Andererseits ist $\dim U \leqslant \binom{n}{2}$ und $\dim \tilde{U} \leqslant \binom{n+1}{2}$, also $\dim U + \tilde{U} \leqslant n^2 = \dim V \otimes V$. Insgesamt daher $V \otimes V = U \oplus \tilde{U}$.

4. Sei V ein K-Vektorraum und $\operatorname{char}(K) \neq 2$. Wir betrachten

$$\begin{aligned} U &= \operatorname{span}\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\} \subset V \otimes V\,, \\ U' &= \operatorname{span}\{v \otimes v \mid v \in V\} \subset V \otimes V\,. \end{aligned}$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Komposition $U \to V \otimes V \to V \wedge V$ ein Isomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Komposition $U' \to V \otimes V \to V \vee V$ ein Isomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ keine der Aussagen (a) und (b) gilt. *Hinweis: Betrachten Sie z.B.* $V = \mathbb{F}_2^2$ *und berechnen Sie* $U, U', V \wedge V, V \vee V$ *und obige Abbildungen explizit.*

Lösung:

(a),(b) Für alle $v, w \in V$ ist

$$v \otimes w + w \otimes v = (v+w) \otimes (v+w) - v \otimes v - w \otimes w \in U' .$$

Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$, folgt dann

$$v \otimes w = \frac{1}{2}(v \otimes w + w \otimes v + v \otimes w - w \otimes v) \in U + U' ,$$

also $U + U' = V$. Außerdem ist $U \cap U' = 0$: wenn $\sigma(v \otimes w) = w \otimes v$ die Involution auf $V \otimes V$ bezeichnet, dann ist $\sigma|_U = -\mathrm{id}$ und $\sigma|_U = \mathrm{id}$. Es sind also U und U' die Eigenräume zu Eigenwert 1 bzw. -1 und haben somit trivialen Schnitt ($\mathrm{char}(K) \neq 2$). Insgesamt daher $V \otimes V = U \oplus U'$. Die Behauptungen in (a) und (b) folgen dann analog zur Lösung Aufgabe 3.

(c) Für $\mathrm{char}(K) = 2$ ist nun $v \otimes w - w \otimes v = v \otimes w + w \otimes v$, daher nach obigem Argument $U \subset U'$. Die Abbildung in (a) ist also identisch 0 und kein Isomorphismus. Die Abbildung in (b) hat per Konstruktion Kern $U \cap U'$, also für $\mathrm{char}(K) \neq 2$ ebenfalls kein Isomorphismus.

Man kann dies auch am Beispiel $V = \mathbb{F}_2^2$ konkret sehen: Dann ist $V \otimes V$ 4-dimensional mit Basis $e_i \otimes e_j$, $i, j = 1, 2$. U ist erzeugt von Vektoren der Form

$$\begin{aligned}&(x_1e_1 + x_2e_2) \otimes (y_1e_1 + y_2e_2) - (y_1e_1 + y_2e_2) \otimes (x_1e_1 + x_2e_2)\\ &= (x_1y_2 + x_2y_1)(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1).\end{aligned}$$

Also ist $U = \mathrm{span}(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1)$. Ebenso ist U' aufgespannt von Vektoren der Form

$$\begin{aligned}&(x_1e_1 + x_2e_2) \otimes (x_1e_1 + x_2e_2)\\ &= x_1^2 e_1 \otimes e_1 + x_1x_2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + x_2^2 e_2 \otimes e_2\\ &= x_1 e_1 \otimes e_1 + x_1x_2(e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1) + x_2 e_2 \otimes e_2.\end{aligned}$$

Also $U' = \mathrm{span}(e_1 \otimes e_1, (e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1), e_2 \otimes e_2)$. Es ist $V \wedge V = V \otimes V/U'$ ein eindimensionaler Vektorraum mit Basis $e_1 \wedge e_2 = e_1 \otimes e_2 + U' = e_2 \wedge e_1$. Die Abbildung $U \to V \wedge V$ ist dann $= 0$, denn $U \subset U'$. Ausserdem ist $V \vee V = V \otimes V/U$ dreidimensional mit Basis $e_1 \vee e_1, e_1 \vee e_2 = e_2 \vee e_1, e_2 \vee e_2$. Die Abbildung $U' \to V \vee V$ bildet unsere Basiselement ab wie folgt:

$$\begin{aligned}e_1 \otimes e_1 &\mapsto e_1 \otimes e_1\\ e_2 \otimes e_2 &\mapsto e_2 \otimes e_2\\ e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 &\mapsto e_1 \vee e_2 + e_2 \vee e_1 = 2e_1 \vee e_2 = 0 .\end{aligned}$$

Sie ist also nicht injektiv.

5. Seien U, V, W Vektorräume.

   (a) Zeigen Sie, dass $U \otimes V \cong V \otimes U$ unter Verwendung der universellen Eigenschaft.

   (b) Zeigen Sie, dass ein Vektorraum $U \otimes V \otimes W$ zusammen mit einer 3-linearen Abbildung
   $$\eta \colon U \times V \times W \to U \otimes V \otimes W$$
   existiert, mit folgender universellen Eigenschaft:
   Für jeden Vektorraum Z mit 3-linearer Abbildung $\xi \colon U \times V \times W \to W$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\xi_{\otimes} \colon U \otimes V \otimes W \to Z$, mit $\xi = \xi_{\otimes} \circ \eta$. Zeigen Sie weiter, dass $U \otimes V \otimes W$ hierdurch eindeutig, bis auf eindeutigen Isomorphismus definiert ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ indem Sie die universelle Eigenschaft aus (b) benützen.

Lösung:

(a) Die Zuordnung $(u, v) \mapsto v \otimes u$ definiert eine bilineare Abbildung $U \times V \to V \otimes U$, wie man leicht überprüft. Aus universeller Eigenschaft des Tensorprodukts $U \otimes V$ erhalten wir daher eine lineare Abbildung $U \otimes V \to V \otimes U$. Wir argumentieren analog nach Vertauschung der Rollen von V und U. Die beiden Abbildungen die wir konstruiert haben sind invers zueinander.

(b) Wir definieren $U \otimes V \otimes W$ als $U \otimes (V \otimes W)$, wobei das Tensorprodukt in der Klammer zuerst ausgeführt wird. Hierduch ist ein Vektorraum wohldefiniert. Für Z und ξ wie oben ist dann für jedes $u \in U$ die Abbildung
$$V \times W \to Z\,, (v, w) \mapsto \xi(u, v, w)$$
bilinear. Wir erhalten also eine Abbildung
$$U \to \mathrm{Hom}(V \otimes W, Z)\,.$$
Diese Zuordnung ist tatsächlich aber linear und induziert daher eine bilineare Abbildung
$$U \times (V \otimes W) \to Z\,.$$
Nach universeller Eigenschaft erhalten wir die gesuchte Abbildung
$$\xi_{\otimes} \colon U \otimes V \otimes W \to Z\,.$$
Wir wissen, dass $V \otimes W$ eindeutig, bis auf eindeutige Isomorphie definiert ist. Das gleiche trifft dann auf $U \otimes (V \otimes W)$ zu. Das ist aber gerade unsere Definition von $U \otimes V \otimes W$.

(c) Die rechte Seite ist unsere Definition des Tensorprodukts $U \otimes V \otimes W$. Wir zeigen also, dass die linke Seite die gleiche universelle Eigenschaft besitzt. Isomorphie folgt dann aus der Eindeutigkeit (bis auf eindeutige Isomorphie). Seien hierzu Z und ξ wie oben. Wir folgen der gleichen Konstruktion wie oben, indem wir für $w \in W$ zunächst die bilineare Abbildung

$$U \times V \to Z\,, (u, v) \mapsto \xi(u, v, w)$$

betrachten. Wir erhalten somit die lineare Zuordnung

$$W \to \mathrm{Hom}(U \otimes V, Z)$$

und nach universeller Eigenschaft dann

$$\xi_{\otimes} \colon U \otimes V \otimes W \to Z\,.$$