Musterlösung Serie 10

Multilineare Algebra

1. Seien α, β, γ Vektoren in einem K-Vektorraum. Vereinfachen Sie die Ausdrücke

   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$,

   (b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$,

   (c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

   Lösung:

   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta) = \alpha \wedge \alpha + \alpha \wedge \beta - \beta \wedge \alpha - \beta \wedge \beta = 2\,\alpha \wedge \beta$.

   (b) Mit $v_1 := \alpha - \beta$ und $v_2 := \beta - \gamma$ ist $\gamma - \alpha = -v_1 - v_2$. Also gilt

   $$\begin{aligned}(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha) &= v_1 \wedge v_2 \wedge (-v_1 - v_2)\\ &= -v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 - v_1 \wedge v_2 \wedge v_2\\ &= 0.\end{aligned}$$

   (c) Es gilt

   $$\begin{aligned}&(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma\\ =& (\beta \wedge \gamma - \beta \wedge \alpha - \alpha \wedge \gamma) + \alpha \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma\\ =& \alpha \wedge \beta.\end{aligned}$$

2. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_4 \in V$. Zeigen Sie: Es existieren Vektoren $w_1, w_2 \in V$ mit

   $$v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2\,,$$

   genau dann wenn $v_1, \ldots, v_4$ linear abhängig sind.

   Lösung:

   Falls $v_1, \ldots, v_4$ linear abhängig ist, lässt sich einer der Vektoren v_i als Linearkombination der anderen darstellen. Nach etwaigem Vertauschen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $v_4 = av_1 + bv_2 + cv_3$ mit Koeffizienten $a, b, c \in K$ annehmen. Dann ist

   $$\begin{aligned}v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 &= v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge (av_1 + bv_2)\\ &= v_1 \wedge v_2 - a \cdot v_1 \wedge v_3 + b \cdot v_3 \wedge v_2\\ &= v_1 \wedge (v_2 - av_3) + b \cdot v_3 \wedge (v_2 - av_3)\\ &= (v_1 + bv_3) \wedge (v_2 - av_3),\end{aligned}$$

   also von der Form $w_1 \wedge w_2$ mit $w_1 := v_1 + bv_3$ und $w_2 := v_2 - av_3$.

Falls $v_1, \dots, v_4$ linear unabhängig sind, so erweitere $\{v_1, \dots, v_4\}$ zu einer Basis $\{v_i \mid i \in I\}$ von V und die gegebene Ordnung auf $\{1,2,3,4\}$ zu einer Totalordnung $\preceq$ auf I. Dann bilden die Vektoren $b_i \wedge b_j$ für alle $i \prec j$ eine Basis von $\Lambda^2 V$.

Nehmen wir nun an, es existieren Elemente $w_1 = \sum_{i \in I} a_i v_i$ und $w_2 = \sum_{j \in I} b_j v_j$ in V mit $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2$. Dann berechnen wir

$$w_1 \wedge w_2 \;=\; \sum_{i,j \in I} a_i b_j \cdot v_i \wedge v_j \;=\; \sum_{i,j \in I \text{ mit } i \prec j} (a_i b_j - a_j b_i) \cdot v_i \wedge v_j .$$

Durch Vergleichen der Koeffizienten von $v_i \wedge v_j$ für alle $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ folgt

$$\begin{array}{llll} (1) & a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1, & (4) & a_2 b_3 - a_3 b_2 = 0, \\ (2) & a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0, & (5) & a_2 b_4 - a_4 b_2 = 0, \\ (3) & a_1 b_4 - a_4 b_1 = 0, & (6) & a_3 b_4 - a_4 b_3 = 1. \end{array}$$

Wegen (1) können wir nach der etwaigen Substitution $(w_1, w_2) \mapsto (w_2, -w_1)$ annehmen, dass a_1 und b_2 beide nicht 0 sind. Dann ist

$$b_3 \overset{(2)}{=} \frac{b_1}{a_1} a_3 \overset{(4)}{=} \frac{b_1 a_2}{a_1 b_2} b_3 \overset{(1)}{=} \frac{a_1 b_2 - 1}{a_1 b_2} b_3 \;=\; b_3 - \frac{b_3}{a_1 b_2},$$

also $\frac{b_3}{a_1 b_2} = 0$ und somit $b_3 = 0$. Aus (4) und $b_2 \neq 0$ folgt dann auch $a_3 = 0$. Damit führt aber (6) zu einem Widerspruch. Daher ist $v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4$ nicht rein.

3. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung von Serie 9, Aufg. 3: Sei V ein K-Vektorraum und $k \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Konstruieren Sie einen K-Vektorraum $\bigvee^k V$, das *k-fache symmetrische Produkt*, zusammen mit einer K-linearen Abbildung $\vee$

$$\vee \colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to \bigvee^k V ,$$

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: zu jedem K-Vektorraum W zusammen mit einer symmetrischen multilinearen Abbildung

$$\xi \colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to W$$

gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee$, so dass $\xi = \xi_\vee \circ \vee$. Ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, so ist durch $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ für $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k$ eine Basis von $\bigvee^k V$ gegeben. Insbesondere ist

$$\dim \bigvee^k V = \binom{n+k-1}{k} .$$

Lösung:

Es sei S_k die symmetrische Gruppe. Wir betrachten den Untervektorraum des k-fachen Tensorprodukts

$$S^k(V) = \operatorname{span}\{v_1 \otimes \cdots \otimes v_k - v_{\sigma 1} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma k} \mid v_i \in V, \sigma \in S_k\} \subset \bigotimes^k V\,.$$

Wir definieren das symmetrische Produkt als den Quotientenvektorraum

$$\bigvee^k V = \bigotimes^k V / S^k(V)\,.$$

und bezeichnen mit $v_1 \vee \cdots \vee v_k$ die Restklasse von $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k$ im Quotienten. Hierdurch ist ein K-Vektorraum wohldefiniert. Die Abbildung

$$(v_1, \ldots, v_k) \mapsto v_1 \vee \cdots \vee v_k$$

definiert die gesuchte symmetrische multilineare Abbildung

$$\vee \colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to \bigvee^k V\,.$$

Die universelle Eigenschaft folgt nun ganz parallel zu Serie 9, Aufg. 3 unmittelbar aus der Definition einer symmetrischen multilinearen Abbildung, zusammen mit der universellen Eigenschaft des Quotientenvektorraums.

Wir zeigen schließlich die Behauptung bzgl. der Basis. Da $v_{i_1} \otimes \cdots \otimes v_{i_k}$ eine Basis des Tensorprodukts bilden, erzeugen die Bilder, also $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ das symmetrische Produkt $\bigvee^k V$. Da aber für alle $\sigma \in S_k$

$$v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k} = v_{\sigma i_1} \vee \cdots \vee v_{\sigma i_k}\,,$$

wird $\bigvee^k V$ erzeugt durch alle $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ mit $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k$. Wir zeigen noch die lineare Unabhängigkeit. Sei hierfür

$$N = \binom{n+k-1}{k}$$

die Anzahl solcher $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$. Wir definieren eine Surjektion (tatsächlich ein Isomorphismus)

$$\bigvee^k V \to K^N\,.$$

Sei $e_{i_1,\ldots,i_k}$ eine Basis von K^N. Für $w_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \in V$ definiert die Zuordnung

$$(w_1, \ldots, w_k) \mapsto \sum_{i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k} \Big(\sum_{\sigma \in S_k} a_{1\sigma i_1} \cdots a_{k \sigma i_k} \cdot e_{i_1,\ldots,i_k} \Big)$$

eine symmetrische multilineare Abbildung

$$\underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to K^N\,.$$

Aus der universellen Eigenschaft erhalten wir daher eine lineare Abbildung

$$\bigvee^k V \to K^N$$

mit $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k} \mapsto e_{i_1,\dots,i_k}$. Die Abbildung ist insbesondere surjektiv und die $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ daher linear unabängig.

4. Sei V endlich dimensionaler K-Vektorraum, $k, \ell \geqslant 1$ und

$$\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k V\,, \quad \beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_\ell \in \Lambda^\ell V\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass eine bilineare Abbildung

$$\mu\colon \Lambda^k V \times \Lambda^\ell V \to \Lambda^{k+\ell} V$$

mit

$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_\ell$$

existiert. Das Element $\alpha \wedge \beta = \mu(\alpha, \beta)$ heißt äußeres Produkt von α und β.

(b) Es gilt

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha\,.$$

Lösung:

(a) Die Abbildung μ kann mittels universeller Eigenschaft des äußeren Produkts $\Lambda^k V$ bzw. $\Lambda^\ell V$ konstruiert werden. Man bemerke hierfür, dass für gegebenes $(\beta_1, \dots, \beta_\ell) \in V^\ell$ die Abbildung

$$V^k \to \Lambda^{k+\ell} V\,, (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mapsto \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_\ell$$

alternierend multilinear ist, und daher eine Abbildung

$$\Lambda^k V \to \Lambda^{k+\ell} V$$

induziert. Wir haben also eine Zuordnung

$$V^\ell \to \mathrm{Hom}(\Lambda^k V, \Lambda^{k+\ell} V)$$

beschrieben. Nun überprüft man, dass diese Zurodnung tatsächlich eine alternierende multilineare Abbildung ist. Erneut unter Verwendung der universellen Eigenschaft (dieses Mal von $\Lambda^\ell V$) erhalten wir dann eine lineare Abbildung

$$\Lambda^\ell V \to \mathrm{Hom}(\Lambda^k V, \Lambda^{k+\ell} V)$$

oder, äquivalent, die gesuchte bilineare Abbildung

$$\mu\colon \Lambda^k V \times \Lambda^\ell V \to \Lambda^{k+\ell} V\,.$$

(b) Die Formel folgt unter wiederholter Nutzung der Rechenregel

$$v \wedge w = -w \wedge v \in \Lambda^2 V\,.$$

Man berechnet direkt:

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_\ell \\ &= -\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{k-1} \wedge \beta_1 \wedge \alpha_k \wedge \beta_2 \cdots \wedge \beta_\ell \\ &= \ldots \\ &= (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha\,.\end{aligned}$$

5. Beweisen Sie die Polarisationsformel für symmetrische multilineare Abbildungen: Sei $k \geqslant 1$ eine natürliche Zahl, K ein Körper mit $\mathrm{char} K > k$ und seien V und W Vektorräume über K. Weiter sei

$$s\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to W$$

eine symmetrische multilineare Abbildung. Wir definieren die Abbildung

$$q\colon V \to W\,, \qquad q(v) = s(v, \ldots, v)\,.$$

Zeigen Sie, dass man s aus q wieder gewinnen kann. Für $v_1, \ldots, v_k \in V$ und eine nicht-leere Teilmenge $S \subset \{1, \ldots, k\}$ setze $v_S = \sum_{j \in S} v_j$. Dann gilt

$$s(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,k\} \\ S \neq \varnothing}} (-1)^{k-|S|} q(v_S)\,, \tag{1}$$

$$s(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{(2^k k!)} \sum_{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \cdot q(\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_k v_k)\,. \tag{2}$$

Lösung: Die Formel (1) folgt nach Division durch $(-1)^k k!$ aus:

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,k\} \\ S \neq \varnothing}} (-1)^{|S|} q(v_S) &= \sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,k\} \\ S \neq \varnothing}} (-1)^{|S|} \left(\sum_{\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to S} s(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \right) \\ &= \sum_{\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}} s(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \left(\sum_{\mathrm{Im}(\sigma) \subset S \subset \{1,\ldots,k\}} (-1)^{|S|} \right) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} s(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) (-1)^k \\ &= (-1)^k k! s(v_1, \ldots, v_k)\,.\end{aligned}$$

Beim Übergang der zweiten zur dritten Zeile wurde hierbei verwendet, dass die Summe in der Klammer $(-1)^k \cdot (1-1)^{k-|\mathrm{Im}(\sigma)|}$ entspricht und daher $(-1)^k$ für σ bijektiv und 0 sonst ergibt. Wir zeigen Formel (2) analog:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \cdot q(\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_k v_k) \\
&= \sum_{\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}} s(v_{\sigma 1}, \ldots, s_{\sigma k}) \left(\sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \cdot \varepsilon_{\sigma 1} \cdots \varepsilon_{\sigma k} \right) \\
&= \sum_{\sigma\colon \{1,\ldots,k\} \to \{1,\ldots,k\}} s(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma k}) \left(\sum_{\varepsilon_{\sigma 1},\ldots,\varepsilon_{\sigma k} \in \{\pm 1\}} \underbrace{\sum_{\substack{\varepsilon_i \in \{\pm 1\} \\ i \notin \mathrm{Im}(\sigma)}} \prod \varepsilon_i}_{=0,\text{ falls } \sigma \text{ nicht bijektiv}} \right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_k} 2^k s(v_{\sigma 1}, \ldots, v_{\sigma k}) \\
&= 2^k k! s(v_1, \ldots, v_k)\,.
\end{aligned}
$$