# Musterlösung Serie 12

## Jordansche Normalform

1. Gegeben seien Punkte $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^3$, mit $n \geqslant 6$. Finden Sie die euklidische Transformation, also ein $c \in \mathbb{R}^3$ und $R \in O(3)$, die den Fehler

$$E(R, c) = \sum_{j=1}^{n} \|v_j - (Rw_j + c)\|^2$$

minimiert.

*Bemerkung: Dies ist ein häufiges Problem in der Praxis: Sie möchten messen, wie ein bekanntes Objekt im Raum orientiert ist. Dabei sind hier die $w_j$ Punkte in einem perfekten (Computer-)Modell Ihres Objektes, und die $v_j$ sind die real gemessenen Positionen der entsprechenden Punkte im Raum. (Oft hat man tatsächlich natürlich weniger Informationen als die Position der $v_j$, z.B. nur ein 2D Bild. Wer weitergehende Dinge lernen möchte kann nach "pose estimation" suchen.)*

*Hinweis: Verschieben Sie zunächst Ihre Punkte so, dass der Schwerpunkt im Ursprung liegt, also*

$$\sum_j v_j = 0 = \sum_j w_j \,.$$

*Das macht die Rechnung einfacher. (... und schauen Sie Satz 2.8 im Zusatzskript an.)*

*Lösung:*

Sei $\bar{v} = \frac{1}{n} \sum v_j$ und $\bar{w} = \frac{1}{n} \sum w_j$. Dann gilt

$$(v_j - \bar{v}) - R'(w_j - \bar{w}) - c' = v_j - R'w_j - (\bar{v} - R\bar{w} + c')\,.$$

Also lösen $R'$ und $c'$ das entsprechende Problem für $v_j - \bar{v}$ und $w_j - \bar{w}$ genau dann wenn $R = R'$ und $c = \bar{v} - R\bar{w} + c'$ das obige Problem lösen. Wir können daher direkt annehmen, dass

$$\sum v_j = 0 = \sum w_j \,,$$

indem wir die $v_j$ und $w_j$ durch $v_j - \bar{v}$ und $w_j - \bar{w}$ ersetzen.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_j \|v_j - Rw_j - c\|^2 &= \sum_j \Big(\|v_j\|^2 - 2\langle v_j, Rw_j\rangle + \|w_j\|^2 - 2\langle c, v_j - Rw_j\rangle + \|c\|^2\Big) \\
&= \sum_j \Big(\|v_j\|^2 - 2\langle v_j, Rw_j\rangle + \|w_j\|^2\Big) - 2\langle c, \underbrace{\sum_j v_j}_{=0} - R\underbrace{\sum_j w_j}_{=0}\rangle + n\|c\|^2 \\
&= \sum_j \Big(\|v_j\|^2 - 2\mathrm{tr}(v_j \cdot (Rw_j)^T) + \|w_j\|^2\Big) + n\|c\|^2 .
\end{aligned}$$

Für jedes $R$ ist das diesen Ausdruck minimierende $c$ gerade $c = 0$. Wir setzen nun $A = \sum_j v_j \cdot w_j^T \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$. Dann wird $E(R, 0)$ minimiert, genau dann wenn

$$\mathrm{tr}(A \cdot R^T)$$

maximiert wird. Genau wie im Beweis von Satz 2.8 Zusatzskript Singulärwertzerlegung, verwenden wir hierfür die Singulärwertzerlegung von $A$:

$$A = UDV^T .$$

Dann wird $\mathrm{tr}(A \cdot R^T) = \mathrm{tr}(UDV^T R^T) = \mathrm{tr}(D(V^T R^T U))$ genau wie im Beweis dort durch solche $R$ minimiert, dass $V^T R^T U = E_3$. Also ist $R^T = VU^T$, also $R = UV^T$.

2. Bestimmen Sie die Haupträume (=verallgemeinerte Eigenräume) folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -7 & -7 & -2 \\ 22 & 16 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung: Zerfällt das charakteristische Polynom des Endomorphismus $F$ in irreduzible (lineare oder quadratische) Faktoren*

$$P_F = \pm p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

*so ist der zum Faktor $p_j$ gehörende Hauptraum gerade Ker$(p_j(F)^{r_j})$.*

*Lösung*:

$A$: Das charakteristische Polynom von $A$ ist

$$\mathrm{char}_A(X) = -(X^2+9)(X+5)\,.$$

Der Faktor $(X^2+9)$ ist irreduzibel über $\mathbb{R}$. Der zugehörige Hauptraum ist

$$\mathrm{Ker}(A^2+9E_3) = \mathrm{span}\big((1,0,-2)^T, (1,-1,0)^T\big)\,.$$

Der Hauptraum zum Faktor $(X+5)$ ist

$$\mathrm{Ker}(A+5E_3) = \mathrm{span}(0,1,-1)^T\,.$$

$B$ : Das charakteristische Polynom der gegebenen Matrix $B$ ist

$$\mathrm{char}_B(X) = (X-1)^3(X+1)\,.$$

Der Hauptraum zum Faktor $X+1$ ist

$$\mathrm{Hau}_{X+1}(B) = \mathrm{Ker}(B+E_4) = \mathrm{Eig}_{-1}(B) = \langle\, (0,-2,3,2)^T \,\rangle\,.$$

Der Hauptraum zum Faktor $X-1$ ist nach Definition der Kern der Abbildung $(B-E_4)^3$. Wir haben

$$(B-E_4)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

also

$$\mathrm{Hau}_{X-1}(B) = \mathrm{span}\big(\,(1,0,0,0)^T,\ (0,1,0,0)^T,\ (0,0,1,0)^T\,\big)\,.$$

$C$ : Das charakteristische Polynom der Matrix $C$ ist

$$\mathrm{char}_C(X) = -(X^3-5X^2+8X-6) = -(X-3)(X^2-2X+2)\,.$$

Der Hauptraum zum Faktor $X-3$ ist

$$\mathrm{Hau}_{X-3}(C) = \mathrm{Eig}_3(C) = \mathrm{span}\,(0,1,1)^T\,.$$

Der Faktor $p(X) = X^2-2X+2$ hat keine reellen Nullstellen, ist also irreduzibel über $\mathbb{R}$. Mit

$$p(C) = C^2-2C+2E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

folgt

$$\mathrm{Hau}_{p(X)}(C) = \mathrm{Ker}(p(C)) = \mathrm{span}\big(\,(1,1,-1)^T,\ (0,4,-1)^T\,\big)$$

$D:$ Das charakteristische Polynom der Matrix $D$ ist

$$\mathrm{char}_D(X) = X^4 - 6X^3 + 13X^2 - 12X + 4 = (X-2)^2 \cdot (X-1)^2 .$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Hau}_{X-2}(D) &= \mathrm{Ker}((D - 2E_4)^2) \\ &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 & -3 \\ 13 & -3 & 5 & -5 \\ -8 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{span}\big( (1,1,0,2)^T,\ (0,0,1,1)^T \big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathrm{Hau}_{X-1}(D) &= \mathrm{Ker}((D - E_4)^2) \\ &= \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{span}\big( (0,1,0,0)^T,\ (1,0,-1,0) \big) . \end{aligned}$$

3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform über $\mathbb{R}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie anschließend $\exp(\pi A)$.

*Lösung*:

Das charakteristische Polynom von $A$ berechnet sich leicht als

$$\det(tE_3 - A) = -(t^2+1)(t-2) .$$

Die Matrix ist daher über $\mathbb{R}$ nicht diagonalisierbar, da $p(t) = t^2 + 1$ über $\mathbb{R}$ nicht in Linearfaktoren zerfällt. Die komplexen Eigenwerte sind $i$, $-i$ und $2$ und die reelle Jordan Normalform ist

$$J = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ,$$

wobei $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$ Basiswechselmatrix ist. Die Matrix $S$ lässt sich mittels des Schemas siehe Zusatzskript zur JNF, Beweis von Theorem 2.2. finden: Die ersten zwei Basisvektoren erhalten wir als Basis des Kerns von $p(A) = A^2 + E_3$:

$$\mathrm{Ker}(A^2 + E_3) = \mathrm{span}\big((1,0,1)^T, (0,-2,-1)^T\big) .$$

Der dritte Basisvektor ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 2, z.B. $(1, 2, 1)^T$, also insgesamt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Die Inverse berechnet man als

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} .$$

Schließlich berechnen wir $\exp(\pi A)$. Hierfür verwenden wir, dass die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

aufgefasst als Endomorphismus von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ gerade Multiplikation mit $i$ ist, und daher

$$\exp(\pi I) = -E_2 .$$

Es folgt daher

$$\begin{aligned} \exp(\pi A) &= \exp(\pi S J S^{-1}) = S \exp(\pi J) S^{-1} \\ &= S \cdot \operatorname{diag}(-1, -1, e^{2\pi}) \cdot S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{2\pi} & \frac{1}{2}(1 + e^{2\pi}) & -1 - e^{2\pi} \\ 2 + 2e^{2\pi} & e^{2\pi} & -2 - 2e^{2\pi} \\ 1 + e^{2\pi} & \frac{1}{2}(1 + e^{2\pi}) & -2 - e^{2\pi} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

4. Sei $A$ eine invertierbare Matrix mit Einträgen in einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann sind äquivalent:

   (i) $A$ ist ähnlich zu $A^{-1}$,

   (ii) für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ und für alle $k$ sind die Anzahlen der Jordanblöcke der Größe $k$ zum EW $\lambda$ und zum EW $\frac{1}{\lambda}$ gleich.

   *Lösung:*

   (i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $S$ invertierbar mit

   $$A = S A^{-1} S^{-1} ,$$

   dann gilt für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ und alle $r \geqslant 0$

   $$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda^{-1} E)^r &= \dim \operatorname{Ker}(S A^{-1} S^{-1} - \lambda^{-1} S S^{-1})^r \\ &= \dim \operatorname{Ker}(A^{-1} - \lambda^{-1} E)^r \\ &= \dim \operatorname{Ker}(\lambda E - A)^r \\ &= \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)^r , \end{aligned}$$

wobei in der vorletzten Gleichheit verwendet wurde, dass $(\lambda A)^r$ invertierbar ist. Hierdurch sind aber die Größe und Anzahl der Jordan Blöcke für $A$ festgelegt, also folgt (ii).

(ii) $\implies$ (i): Die Eigenwerte von $A^{-1}$ sind gerade $\lambda^{-1}$ für jeden Eigenwert $\lambda$ mit Eigenvektor $v$ von $A$ da

$$Av = \lambda v \implies \lambda^{-1} v = A^{-1} v\,,$$

wobei verwendet wurde, dass $\lambda \neq 0$, da $A$ invertierbar. Aus Bedingung (ii) folgt also, dass $A^{-1}$ die gleiche JNF wie $A$ hat. Daher sind $A$ und $A^{-1}$ ähnlich zueinander.

*5. Sei $F$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$, wobei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) Das Minimalpolynom von $F$ ist gleich dem charakteristischen Polynom von $F$.

(b) Es existiert eine geordnete Basis $B$ von $V$, so dass $M_B(f)$ die Begleitmatrix eines Polynoms ist.

*Bemerkung: Die Implikation (b)⇒(a) wurde schon in der Vorlesung gezeigt und muss hier nicht mehr neu bewiesen werden.*

*Lösung*: Aus Zusatzskript zur JNF, Satz 3.1 folgt (b)⇒(a).

Nehmen wir umgekehrt (a) an. Seien $p_1, \ldots, p_r$ die verschiedenen normierten irreduziblen Faktoren des charakteristischen Polynoms $\varphi = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$ von $F$. Für jedes $i$ sei $V_i = \mathrm{Hau}_{p_i}(F)$ der Hauptraum von $F$ bezüglich $p_i$, und sei $F_i$ der von $F$ induzierte Endomorphismus von $V_i$. Nach Zusatzskript JNF Theorem 2.2 ist dann $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$, und das charakteristische Polynom von $F_i$ ist $p_i^{m_i}$. Nach Annahme in (a) ist $\varphi = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$ auch das Minimalpolynom von $F$. Daher ist für jedes $i$ die Abbildung

$$p_i^{m_i-1}(F) \prod_{j\neq i} p_j^{m_j}(F)$$

nicht die Nullabbildung. Für jedes $i$ existiert also ein $w_i \in V$ mit

$$p_i^{m_i-1}(F) \prod_{j\neq i} p_j^{m_j}(F)(w_i) \neq 0.$$

Für dieses $w_i$ gilt dann $v_i := \prod_{j\neq i} p_j^{m_j}(F)(w_i) \in V_i$ und $p_i^{m_i-1}(F_i)(v_i) \neq 0$. Der Unterraum $V_i' := \mathrm{Ker}(p_i^{m_i-1}(F_i))$ ist also ein echter Unterraum von $V_i$ und $v_i \in V_i \setminus V_i'$. Setze $v = \sum_{i=1}^r v_i$. Nach Konstruktion gilt dann

$$(*) \qquad p_i^{m_i-1}(F) \prod_{j\neq i} p_j^{m_j}(F)(v) \neq 0$$

für alle $i$.

Sei nun $U$ der von allen $F^k(v)$ für $k \geqslant 0$ erzeugte Unterraum. Sei $n$ die kleinste natürliche Zahl, so dass $F^n(v)$ von den $F^k(v)$ für $k < n$ linear abhängig ist. Schreibe $F^n(v) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k F^k(v)$ und setze $\psi(X) = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Dann ist $\psi$ ein normiertes Polynom von minimalem Grad mit $\psi(F)(v) = 0$. Für dieses gilt dann auch $\psi(F)(F^k(v)) = F^k(\psi(F)(v)) = F^k(0) = 0$ für alle $k \geqslant 0$. Somit ist $\psi$ ein normiertes Polynom von minimalem Grad mit $\psi(F)|U = 0$, das heisst, es ist das Minimalpolynom der Einschränkung $F|U$. Dieses teilt das Minimalpolynom $\varphi$ von $F$. Aber wegen $(*)$ kann es kein echter Teiler davon sein. Somit gilt $\psi = \varphi$. Nach Konstruktion ist die Dimension von $U$ gleich dem Grad von $\psi$. Dieser ist nun aber gleich dem Grad des charakteristischen Polynoms $\varphi$ von $F$, also gleich der Dimension von $V$. Daraus folgt also $U = V$.

Schliesslich impliziert dies, dass schon die Elemente $F^k(v)$ für $0 \leqslant k < n = \dim(V)$ eine Basis von $V$ bilden. Für die geordnete Basis $B = (F^{n-1}(v), \ldots, F(v), v)$ ist die Darstellungsmatrix dann eine Begleitmatrix.