Lineare Algebra II - Prüfung Sommer 2020

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Wie viele mögliche Jordansche Normalformen hat ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $P_F = t(t-1)^3(t-2)^2$? Hierbei ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und Jordansche Normalformen, die sich nur durch Umordnung der Zeilen und Spalten unterscheiden, sollen als gleich gelten.

   (a) 1
   (b) 4
   (c) 6
   (d) 9

   (II) Welche der folgenden Aussagen ist richtig, wobei V ein endlich dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

   (a) Jeder nilpotente diagonalisierbare Endomorphismus von V ist 0.
   (b) Jeder nilpotente Endomorphismus von V ist diagonalisierbar.
   (c) Es gibt ein nilpotentes $F \in \mathrm{End}(V)$ dessen charakteristisches Polynom durch $t+1$ teilbar ist.
   (d) Für jeden nilpotenten Endomorphismus F von V gibt es eine Basis $\mathcal{B}$ von V so dass

   $$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

   (III) Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ (und alle n)?

   (a) A, B sind ähnlich genau dann wenn für die charakteristischen Polynome gilt $P_A = P_B$.
   (b) A, B sind ähnlich genau dann wenn $P_A = P_B$ und $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n) = \dim \mathrm{Ker}(B - \lambda E_n)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.
   (c) A, B sind ähnlich genau dann wenn $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda E_n)^k = \dim \mathrm{Ker}(B - \lambda E_n)^k$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und alle $k \geqslant 1$.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (IV) Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $R \in SO(n)$ und für alle $n \geqslant 2$?

(a) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von R.

(b) Es gibt mindestens einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit $Rv = v$.

(c) Es gibt einen R-invarianten Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ der Dimension 2.

(d) $R - E_n$ ist nilpotent.

(V) Welche der folgenden Aussagen gilt nicht für alle symmetrischen positiv definiten $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$.

(a) Alle Eigenwerte von A sind positiv.

(b) $a_{ii} > 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.

(c) $a_{ii}a_{jj} \geqslant a_{ij}^2$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

(d) $a_{ii} \geqslant a_{ij}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$.

(VI) Sei s eine symmetrische Bilinearform auf dem $\mathbb{R}^n$ und seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ zwei symmetrische Matrizen. Welche der folgenden Aussagen ist notwendig, damit sowohl A als auch B darstellende Matrizen von s sind, bzgl. allenfalls verschiedener Basen.

(a) $A = B$.

(b) A und B sind ähnlich.

(c) Die Anzahl positiver Eigenwerte von A und B sind gleich, und $\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(B)$.

(d) Es gibt ein $R \in O(n)$ so dass $R^T A R = B$.

(VII) Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zu jeder Basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ betrachten wir wie in der Vorlesung den Isomorphismus

$$\Psi_{\mathcal{B}} : V \to V^* \quad \text{mit} \quad \Psi_{\mathcal{B}}(v_j) = v_j^*,$$

wobei $\mathcal{B}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis des Dualraumes V^* ist. Welche der folgenden Aussagen ist richtig (für alle n, V)?

(a) $\Psi_{\mathcal{B}}$ ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$, das heisst für $\mathcal{A}$ jede beliebige andere Basis von V gilt $\Psi_{\mathcal{B}} = \Psi_{\mathcal{A}}$.

(b) Für verschiedene Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist stets $\Psi_{\mathcal{A}} \neq \Psi_{\mathcal{B}}$.

(c) Falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Orthonormalbasen von V sind bzgl. des gleichen Skalarproduktes auf V, so gilt $\Psi_{\mathcal{B}} = \Psi_{\mathcal{A}}$.

(d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

(VIII) Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume. Welche der folgenden Aussagen gilt nicht?

(a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(b) $U_1^\perp \cap U_2 = U_1 \cap U_2^\perp$.

(c) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

(d) $U_1 + U_1^\perp = U_2 + U_2^\perp$.

(IX) Sei (v_1, v_2) eine Basis des K-Vektorraumes V. Welche der folgenden Familien bildet eine Basis von $\Lambda^2 V$?

(a) $(v_1 \wedge v_1, v_1 \wedge v_2, v_2 \wedge v_1, v_2 \wedge v_2)$

(b) $(v_1 \wedge v_1, v_1 \wedge v_2, v_2 \wedge v_2)$

(c) $(v_1 \wedge v_2, v_2 \wedge v_1)$

(d) $(v_2 \wedge (v_1 + v_2))$

(X) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine symmetrische komplexe Matrix, also $A = A^T$. Was können Sie über die Eigenwerte von A aussagen?

(a) Alle Eigenwerte von A sind reell.

(b) Die nicht reellen Eigenwerte treten in konjugiert komplexen Paaren auf.

(c) Summe und Produkt der Eigenwerte müssen positiv sein.

(d) Nichts – jedes n-Tupel $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ komplexer Zahlen kann als Eigenwerte einer solchen Matrix auftreten.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(10 Punkte)* Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A. Berechnen Sie dabei auch eine invertierbare Matrix S, so dass SAS^{-1} in Jordanscher Normalform ist.

   Hinweis: 1 *ist ein Eigenwert von* A.

   (b) *(5 Punkte)* Berechnen Sie $S(A + A^2 + \cdots + A^{10})S^{-1}$.

   Hinweis: Für diese Rechnung benötigen Sie nur die Jordansche Normalform von A*, nicht den expliziten Ausdruck für* S *oder* A.

3. Betrachten Sie die hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1+i \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -i \\ 1-i & 0 & i & 3 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

   (b) *(7 Punkte)* Sei $\langle\ ,\ \rangle_A$ das durch A beschriebene Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

   (c) *(4 Punkte)* Sei B eine invertierbare Matrix, so dass $BA = A(\bar{B}^{-1})^T$. Zeigen Sie, dass B diagonalisierbar ist. Was kann man über die möglichen Eigenwerte von B aussagen?

4. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix und betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_A :\ \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) &\to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}), \\ X &\mapsto AX - XA. \end{aligned}$$

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass durch

$$\langle X, Y \rangle = \mathrm{tr}\left(X\bar{Y}^T\right)$$

   ein Skalarprodukt auf $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ definiert wird, wobei tr die Spur bezeichnet.

   (b) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass $\mathrm{ad}_A^{ad} = \mathrm{ad}_{\bar{A}^T}$, wobei ad_A^{ad} die zu ad_A adjungierte Abbildung bezeichnet, bzgl. des obigen Skalarproduktes.

   (c) *(7 Punkte)* Sei $A = \bar{A}^T$ hermitesch mit charakteristischem Polynom

$$P_A(t) = \pm(t - \lambda_1) \cdots (t - \lambda_n).$$

   Zeigen Sie, dass für das charakteristische Polynom P_{ad_A} von ad_A gilt

$$P_{\mathrm{ad}_A}(t) = \pm \prod_{i,j=1}^{n} (t - \lambda_i + \lambda_j).$$

Hinweis: Seien $v_i, v_j \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektoren von A. Dann ist die $n \times n$-Matrix $v_i \bar{v}_j^T$ ein Eigenvektor von ad_A (zu zeigen). Sie können dies zur Konstruktion einer Basis des $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ aus Eigenvektoren von ad_A verwenden.

5. Seien

$$U = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4, \qquad V = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^4.$$

   (a) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie je Basen für die orthogonalen Komplemente $U^\perp$ und $V^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts des $\mathbb{R}^4$.

   (b) *(9 Punkte)* Bestimmen Sie eine orthogonale Abbildung des $\mathbb{R}^4$, die U auf V abbildet und dabei $U \cap V$ und $(U + V)^\perp$ invariant lässt. Es ist dafür die Matrix der orthogonalen Abbildung (bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^4$) anzugeben.
   Hinweis: In diesem speziellen Beispiel hat man die Zerlegung $\mathbb{R}^4 = (U \cap V) \oplus (U \cap V^\perp) \oplus (U^\perp \cap V) \oplus (U^\perp \cap V^\perp)$, was die Rechnung etwas vereinfacht.

6. *(15 Punkte)* Sei $\tilde{O}(n) = \{R \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R}) \mid R^T R = \lambda E_n \text{ für ein } \lambda \in \mathbb{R}\}$.

   (a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes Paar (μ, S) mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $S \in O(n)$ gilt $\mu S \in \tilde{O}(n)$, und dass für jedes $R \in \tilde{O}(n)$ solche μ, S existieren mit $R = \mu S$.

   (b) (4 Punkte) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix mit Singulärwertzerlegung
   $$A = UDV^T.$$
   Zeigen Sie, dass für (μ, S) wie in (a) gilt
   $$\|A - \mu S\|_F^2 = \operatorname{tr}\left(D^2\right) - 2\mu \operatorname{tr}\left(DU^T SV\right) + n\mu^2. \tag{1}$$
   Hierbei bezechnet $\|X\|_F = \sqrt{\operatorname{tr}(X^T X)}$ die Frobeniusnorm einer reellen quadratischen Matrix X.

   (c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für jedes feste S der Ausdruck (1) als Funktion von μ minimiert wird durch
   $$\mu = \frac{1}{n} \operatorname{tr}\left(DU^T SV\right).$$

   (d) (4 Punkte) Sei $A = UDV^T$ wie in (b) und sei $R = \frac{\operatorname{tr}(D)}{n} UV^T \in \tilde{O}(n)$. Beweisen Sie, dass für jedes $R' \in \tilde{O}(n)$ gilt
   $$\|A - R\|_F \leqslant \|A - R'\|_F,$$
   also dass R die optimale Approximation von A ist durch eine Matrix in $\tilde{O}(n)$.
   Bemerkung: Hierbei dürfen Sie die folgende in der Vorlesung bewiesene Aussage ohne neuerlichen Beweis verwenden:
   Lemma: Für $D \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Diagonalmatrix mit nichtnegativen Einträgen und jedes $T \in O(n)$ gilt $\operatorname{tr}(DT) \leqslant \operatorname{tr}(D)$, mit Gleichheit für $T = E_n$.