Lineare Algebra II - Prüfung Winter 2021

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension 5 und $F \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom $m_F(t) = t(t-1)^2$. Wie viele mögliche Jordansche Normalformen hat F? Hierbei sollen Jordansche Normalformen, die sich nur durch Umordnung der Zeilen und Spalten unterscheiden, als gleich gelten.

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

   (II) Welche der folgenden Aussagen ist richtig, wobei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von positiver, endlicher Dimension ist.

   (a) Jeder Isomorphismus (=invertierbarer Endomorphismus) von V ist diagonalisierbar.
   (b) Kommutierende Endormorphismen sind simultan diagonalisierbar.
   (c) Kommutierende Isomorphismen sind simultan diagonalisierbar.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (III) Sei $n \geqslant 1$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so dass $A^3 = A^2$. Dann gilt (für alle solche A):

   (a) $A = 0$.
   (b) $A^2 = A$.
   (c) $A = E_n$.
   (d) $A^2 = E_n$.

   (IV) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von positiver, endlicher Dimension, $F \in \mathrm{End}(V)$ und λ ein Eigenwert von F. Dann gilt:

   (a) $F - \lambda \cdot id$ ist invertierbar.
   (b) $F - \lambda \cdot id$ hat die gleichen Eigenwerte wie F.
   (c) $F - \lambda \cdot id$ hat nur einen Eigenwert.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (V) Welcher der folgenden Vektorräume über $\mathbb{R}$ hat die grösste Dimension?

   (a) $V_1 = \{s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ bilinear und symmetrisch}\}$.

(b) $V_2 = \{s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bilinear und alternierend$\}$.

(c) $V_3 = \mathbb{R}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{R}^3$.

(d) $V_4 = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

(VI) Welche der folgenden Eigenschaften ist für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ zutreffend?

(a) A ist invertierbar.

(b) A ist positiv semidefinit, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $x^T A x \geqslant 0$.

(c) A ist positiv definit.

(d) A ist nilpotent.

(VII) Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ und F ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Weiter sei λ der grösste Eigenwert von F, dann gilt:

(a) $\lambda = \max\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \dfrac{\langle v, F(v)\rangle}{\langle v, v\rangle}$

(b) $\lambda = \min\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \dfrac{\langle v, F(v)\rangle}{\langle v, v\rangle}$

(c) $\lambda = \max\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \langle v, F(v)\rangle$

(d) $\lambda = \min\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \langle v, F(v)\rangle$

(VIII) Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den endlich dimensionalen euklidischen Vektorräumen V und W, und F^{ad} die adjungierte Abbildung. Dann gilt:

(a) $V = \mathrm{Ker}\, F \oplus \mathrm{Im}\, F$.

(b) $\mathrm{Im}\, F^{ad} = \mathrm{Ker}\, F$.

(c) $\dim W - \dim V = \dim \mathrm{Ker}(F^{ad})$.

(d) $V = \mathrm{Ker}\, F \oplus \mathrm{Im}\, F^{ad}$.

(IX) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt die Singulärwertzerlegung $A = UDV^T$ von A im Allgemeinen <u>nicht</u>:

(a) Die Singulärwerte $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ sind immer nicht-negativ, $\sigma_j \geqslant 0$, $j = 1, \ldots, n$.

(b) Die Matrix $R = UV^T \in O(n)$ minimiert den Abstand $\|R - A\|_F$ über alle $R \in O(n)$.

(c) $\mathrm{tr}(A) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$.

(d) Es gibt zu jedem j Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ der Norm 1 so dass $v^T A w = \sigma_j$.

(X) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & i\cos\varphi & -i\sin\varphi \\ 0 & i\sin\varphi & i\cos\varphi \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ unitär?

(a) Für kein $z \in \mathbb{C}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(c) Nur für $z = \pm 1$, und für keine anderen $z \in \mathbb{C}$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Sei A die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(10 Punkte)* Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A.
   Hinweis: 2 ist ein Eigenwert.

   (b) *(5 Punkte)* Finden Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $N = \exp(i\lambda A) - E_3$ nilpotent ist.
   Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A. Sie dürfen ausserdem verwenden, dass für invertierbares S und beliebiges B gilt $\exp(SBS^{-1}) = S\exp(B)S^{-1}$.

3. Betrachten Sie die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

   (b) *(7 Punkte)* Sei $\langle\, , \rangle_A$ das durch A beschriebene Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

   (c) *(4 Punkte)* Gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass $SAS^T = -E_4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

4. (a) *(7 Punkte)* Es sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch mit $\mathrm{tr}(A^2) = 0$. Zeigen Sie, dass $A = 0$.

   (b) *(8 Punkte)* Sei F ein selbstadjungierter Endomorphismus eines unitären Vektorraums V von endlicher Dimension. Zeigen Sie: Falls 2 und 3 die einzigen Eigenwerte von F sind, dann gilt in $\mathrm{End}(V)$:

$$F^2 - 5F + 6 = 0\,,$$

   wobei 6 als Vielfaches der Identität zu verstehen ist.

5. (a) *(7 Punkte)* Bestimmen Sie die Singulärwerte, sowie die Spektralnorm der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) *(8 Punkte)* Seien $m, n \geqslant 1$ und $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix vom Rang $r \geqslant 0$ mit Singulärwertzerlegung (Notation folgt der Vorlesung)

$$A = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{V}^T\,.$$

Hierbei sind $\tilde{U} \in \mathrm{M}(m \times r, \mathbb{R})$ und $\tilde{V} \in \mathrm{M}(n \times r, \mathbb{R})$ mit orthogonalen Spaltenvektoren und $\tilde{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Singulärwerten als Diagonaleinträgen.

Für $k \leqslant r$ seien $\tilde{U}_k$ und $\tilde{V}_k$ die Matrizen, die aus den ersten k Spalten von $\tilde{U}$ bzw. $\tilde{V}$ bestehen und $\tilde{D}_k = \mathrm{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$. Wir definieren A_k als

$$A_k = \tilde{U}_k \tilde{D}_k \tilde{V}_k^T .$$

Zeigen Sie, dass die Singulärwerte der Matrix $A - A_k$ gerade $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$ sind.

6. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und p eine natürliche Zahl. Ein Element von $\Lambda^p V$ der Form $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ für Vektoren $v_1, \dots, v_p \in V$ heisst *rein*. Wir betrachten für ein beliebiges nicht-verschwindendes Element $\alpha \in \Lambda^p V$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f_\alpha : V &\to \Lambda^{p+1} V \\ v &\mapsto v \wedge \alpha \end{aligned}$$

   (a) *(7 Punkte)* Sei zunächst α rein. Zeigen Sie, dass der Kern von f_α dann Dimension p hat.

   (b) *(8 Punkte)* Sei nun $0 \neq \alpha \in \Lambda^p V$ wieder beliebig. Zeigen Sie, dass $\dim(\mathrm{Ker}\, f_\alpha) \leqslant p$, mit Gleichheit genau dann wenn α rein ist.

   Hinweis: Man benutze eine Basis von V, die man durch Ergänzung einer Basis von $\mathrm{Ker}\, f_\alpha$ *erhält.*