Lineare Algebra II - Prüfung Winter 2021

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum der Dimension 5 und $F \in \mathrm{End}(V)$ mit Minimalpolynom $m_F(t) = t(t-1)^2$. Wie viele mögliche Jordansche Normalformen hat F? Hierbei sollen Jordansche Normalformen, die sich nur durch Umordnung der Zeilen und Spalten unterscheiden, als gleich gelten.

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4

   (II) Welche der folgenden Aussagen ist richtig, wobei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum von positiver, endlicher Dimension ist.

   (a) Jeder Isomorphismus (=invertierbarer Endomorphismus) von V ist diagonalisierbar.
   (b) Kommutierende Endormorphismen sind simultan diagonalisierbar.
   (c) Kommutierende Isomorphismen sind simultan diagonalisierbar.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (III) Sei $n \geqslant 1$ und $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch, so dass $A^3 = A^2$. Dann gilt (für alle solche A):

   (a) $A = 0$.
   (b) $A^2 = A$.
   (c) $A = E_n$.
   (d) $A^2 = E_n$.

   (IV) Sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum von positiver, endlicher Dimension, $F \in \mathrm{End}(V)$ und λ ein Eigenwert von F. Dann gilt:

   (a) $F - \lambda \cdot id$ ist invertierbar.
   (b) $F - \lambda \cdot id$ hat die gleichen Eigenwerte wie F.
   (c) $F - \lambda \cdot id$ hat nur einen Eigenwert.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (V) Welcher der folgenden Vektorräume über $\mathbb{R}$ hat die grösste Dimension?

   (a) $V_1 = \{s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \text{ bilinear und symmetrisch}\}$.

(b) $V_2 = \{s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bilinear und alternierend$\}$.
(c) $V_3 = \mathbb{R}^3 \otimes \Lambda^2\mathbb{R}^3$.
(d) $V_4 = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$.

(VI) Welche der folgenden Eigenschaften ist für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ zutreffend?

(a) A ist invertierbar.
(b) A ist positiv semidefinit, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^3$ gilt $x^T A x \geqslant 0$.
(c) A ist positiv definit.
(d) A ist nilpotent.

(VII) Sei V ein unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \, , \rangle$ und F ein selbstadjungierter Endomorphismus von V. Weiter sei λ der grösste Eigenwert von F, dann gilt:

(a) $\lambda = \max\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \dfrac{\langle v, F(v) \rangle}{\langle v, v \rangle}$
(b) $\lambda = \min\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \dfrac{\langle v, F(v) \rangle}{\langle v, v \rangle}$
(c) $\lambda = \max\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \langle v, F(v) \rangle$
(d) $\lambda = \min\limits_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \langle v, F(v) \rangle$

(VIII) Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen den endlich dimensionalen euklidischen Vektorräumen V und W, und F^{ad} die adjungierte Abbildung. Dann gilt:

(a) $V = \mathrm{Ker}\, F \oplus \mathrm{Im}\, F$.
(b) $\mathrm{Im}\, F^{ad} = \mathrm{Ker}\, F$.
(c) $\dim W - \dim V = \dim \mathrm{Ker}(F^{ad})$.
(d) $V = \mathrm{Ker}\, F \oplus \mathrm{Im}\, F^{ad}$.

(IX) Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix. Welche der folgenden Eigenschaften erfüllt die Singulärwertzerlegung $A = UDV^T$ von A im Allgemeinen <u>nicht</u>:

(a) Die Singulärwerte $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ sind immer nicht-negativ, $\sigma_j \geqslant 0$, $j = 1, \dots, n$.
(b) Die Matrix $R = UV^T \in O(n)$ minimiert den Abstand $\|R - A\|_F$ über alle $R \in O(n)$.
(c) $\mathrm{tr}(A) = \sigma_1 + \cdots + \sigma_n$.
(d) Es gibt zu jedem j Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ der Norm 1 so dass $v^T A w = \sigma_j$.

(X) Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & i\cos\varphi & -i\sin\varphi \\ 0 & i\sin\varphi & i\cos\varphi \end{pmatrix}$$

für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ unitär?

(a) Für kein $z \in \mathbb{C}$.

(b) Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$.

(c) Nur für $z = \pm 1$, und für keine anderen $z \in \mathbb{C}$.

(d) Für alle $z \in \mathbb{C}$.

Lösung: (d), (d), (b), (d), (d), (b), (a), (d), (c), (b)

2. Sei A die reelle Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(10 Punkte)* Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A.
   Hinweis: 2 ist ein Eigenwert.

   (b) *(5 Punkte)* Finden Sie alle $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $N = \exp(i\lambda A) - E_3$ nilpotent ist.
   Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A. Sie dürfen ausserdem verwenden, dass für invertierbares S und beliebiges B gilt $\exp(SBS^{-1}) = S\exp(B)S^{-1}$.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A ist
$$\begin{aligned} P_A(t) &= (2-t)(5-t)(-t) + 6 + 9 - 3(5-t) + 3(-t) + 6(2-t) \\ &= -(t-2)^2(t-3)\,. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte von A sind 2 mit Vielfachheit zwei und 3 mit Vielfachheit eins. Wir bestimmen die zugehörigen Eigenräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A - 2E_3) &= \mathrm{span}\big((1,3,-3)\big)\,, \\ \mathrm{Ker}(A - 2E_3)^2 &= \mathrm{span}\big((1,3,-3)\,,(0,1,0)\big)\,, \\ \mathrm{Ker}(A - 3E_3) &= \mathrm{span}\big((0,1,-1)\big)\,. \end{aligned}$$

Die Basiswechselmatrizen sind daher
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Jordansche Normalform ist
$$J = SAS^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei S wie oben, so dass $SAS^{-1} = J$ in Jordanscher Normalform ist. Dann ist N nilpotent genau dann wenn SNS^{-1} nilpotent ist. Unter Verwendung des Hinweises gilt
$$\begin{aligned} SNS^{-1} &= \exp(i\lambda J) - E_3 \\ &= \begin{pmatrix} \exp(2i\lambda) - 1 & \dots & \dots \\ 0 & \exp(2i\lambda) - 1 & \dots \\ 0 & 0 & \exp(3i\lambda) - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist $\exp(x) = 1$ genau dann wenn $x \in 2\pi i\mathbb{Z}$, also folgt (da $2, 3$ teilerfremd) dass $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$.

3. Betrachten Sie die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

   (b) *(7 Punkte)* Sei $\langle\, ,\rangle_A$ das durch A beschriebene Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

   (c) *(4 Punkte)* Gibt es eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{R})$, so dass $SAS^T = -E_4$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Hauptminoren Kriterium um zu zeigen, dass A positiv definit ist. Die Determinante von A ist

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 19 - 9 - 8 = 2\,. \end{aligned}$$

Die Determinanten der führenden Hauptminoren von A sind daher

$$1, \quad 2, \quad 4, \quad 2$$

und somit alle positiv, folglich ist A positiv definit.

(b) Wir verwenden das Gram–Schmidt Verfahren für die Standardbasis $e_1, \dots, e_4$ des $\mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,\, 0,\, 0,\, 0)\ , \\ v_2 &= \left(0,\, \frac{1}{2}\sqrt{2},\, 0,\, 0\right)\ , \\ v_3 &= \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2},\, 0,\, \frac{1}{2}\sqrt{2},\, 0\right)\ , \\ v_4 &= \left(4\sqrt{\frac{1}{2}},\, -\sqrt{\frac{1}{2}},\, -2\sqrt{\frac{1}{2}},\, 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\, . \end{aligned}$$

Die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ bilden nun eine Orthonormalbasis bzgl. $\langle\, ,\rangle_A$.

(c) Die Matrix SAS^T ist die Gram Matrix für $\langle\, , \rangle_A$ nach Basiswechsel mit Basiswechselmatrix S. Nach Trägheitssatz von Sylvester bleibt die Signatur unverändert, die Matrix ist insbesondere noch immer positiv definit. Als Beispiel ist

$$0 \leqslant \langle Se_1, Se_1 \rangle_A = e_1^T(-E_4)e_1 = -1\,,$$

ein Widerspruch.

4. (a) *(7 Punkte)* Es sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch mit $\mathrm{tr}(A^2) = 0$. Zeigen Sie, dass $A = 0$.

   (b) *(8 Punkte)* Sei F ein selbstadjungierter Endomorphismus eines unitären Vektorraums V von endlicher Dimension. Zeigen Sie: Falls 2 und 3 die einzigen Eigenwerte von F sind, dann gilt in $\mathrm{End}(V)$:

$$F^2 - 5F + 6 = 0\,,$$

   wobei 6 als Vielfaches der Identität zu verstehen ist.

Lösung:

(a) Nach Spektralsatz gibt es eine Diagonalmatrix D und $S \in O(n)$ mit $A = SDS^{-1}$. Dann ist

$$0 = \mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(D^2)$$

also, da alle Eigenwerte von A real sind, folgt $D = 0$, mithin $A = 0$.

(b) Nach Spektralsatz existiert eine Basis von V aus Eigenvektoren von F. Sei v Eigenvektor zum Eigenwert 2, dann ist

$$\left(F^2 - 5F + 6\right) v = (F-3)(F-2)v = 0\,.$$

Analoge Rechnung, falls v Eigenvektor zum Eigenwert 3 ist. Es existiert also eine Basis, auf der $F^2 - 5F + 6$ verschwindet, daher $F^2 - 5F + 6 = 0$.

5. (a) *(7 Punkte)* Bestimmen Sie die Singulärwerte, sowie die Spektralnorm der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

   (b) *(8 Punkte)* Seien $m, n \geqslant 1$ und $A \in \mathrm{M}(m \times n, \mathbb{R})$ eine Matrix vom Rang $r \geqslant 0$ mit Singulärwertzerlegung (Notation folgt der Vorlesung)

$$A = \tilde{U}\tilde{D}\tilde{V}^T\,.$$

   Hierbei sind $\tilde{U} \in \mathrm{M}(m \times r, \mathbb{R})$ und $\tilde{V} \in \mathrm{M}(n \times r, \mathbb{R})$ mit orthogonalen Spaltenvektoren und $\tilde{D} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Singulärwerten als Diagonaleinträgen.

Für $k \leqslant r$ seien $\tilde{U}_k$ und $\tilde{V}_k$ die Matrizen, die aus den ersten k Spalten von $\tilde{U}$ bzw. $\tilde{V}$ bestehen und $\tilde{D}_k = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$. Wir definieren A_k als

$$A_k = \tilde{U}_k \tilde{D}_k \tilde{V}_k^T .$$

Zeigen Sie, dass die Singulärwerte der Matrix $A - A_k$ gerade $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$ sind.

Lösung:

(a) Die Singulärwerte von A berechnen sich wie folgt. Wir betrachten zunächst die Matrix

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} .$$

Die Eigenwerte von AA^T sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms:

$$p(t) = -(t-9)(t^2 - 5t) = -(t-9)t(t-5) .$$

Da AA^T positive semi-definit ist, sind alle Eigenwerte $\geqslant 0$. Die Anzahl der Singulärwerte ist gleich dem Rang von A (= dem Rang von AA^T), also gleich 2. Die Singulärwerte sind gerade die Quadratwurzeln der Eigenwerte von AA^T, also

$$\sigma_1 = 3 , \quad \sigma_2 = \sqrt{5} .$$

Die Spektralnorm (oder 2-Norm) ist gerade der grösste Singulärwert, also 3.

(b) Sei $E_{r,k}$ die $r \times k$ Matrix

$$E_{r,k} = \begin{pmatrix} E_k \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Weiter seien U'_{r-k} und V'_{r-k} die Matrizen, die aus den letzten $r-k$ Spalten von $\tilde{U}$ bzw. $\tilde{V}$ bestehen. Dann ist

$$\begin{aligned} A - A_k &= \tilde{U}\tilde{D}\tilde{V}^T - \tilde{U} E_{r,k} \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k) E_{r,k}^T (\tilde{V})^T \\ &= \tilde{U} \left(\tilde{D} - \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k, 0, \dots, 0) \right) (\tilde{V})^T \\ &= \tilde{U} \operatorname{diag}(0, \dots, \sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r)(\tilde{V})^T \\ &= U'_{r-k} \operatorname{diag}(\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r)(V'_{r-k})^T . \end{aligned}$$

Da die Spalten von U'_{r-k} und V'_{r-k} orthogonale Vektoren sind haben wir also eine Singulärwertzerlegung von $A - A_k$, mit Singulärwerten $\sigma_{k+1}, \dots, \sigma_r$ bestimmt.

6. Seien V ein endlichdimensionaler Vektorraum und p eine natürliche Zahl. Ein Element von $\Lambda^p V$ der Form $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ für Vektoren $v_1, \dots, v_p \in V$ heisst *rein*. Wir betrachten für ein beliebiges nicht-verschwindendes Element $\alpha \in \Lambda^p V$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} f_\alpha : V &\to \Lambda^{p+1} V \\ v &\mapsto v \wedge \alpha \end{aligned}$$

(a) *(7 Punkte)* Sei zunächst α rein. Zeigen Sie, dass der Kern von f_α dann Dimension p hat.

(b) *(8 Punkte)* Sei nun $0 \neq \alpha \in \Lambda^p V$ wieder beliebig. Zeigen Sie, dass $\dim(\operatorname{Ker} f_\alpha) \leqslant p$, mit Gleichheit genau dann wenn α rein ist.

Hinweis: Man benutze eine Basis von V, die man durch Ergänzung einer Basis von Ker f_α *erhält.*

Lösung:

(a) Sei $\alpha = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p \neq 0$. Insbesondere sind $v_1, \ldots, v_p$ linear unabhängig (und V hat also mindestens Dimension p). Für alle $1 \leqslant i \leqslant p$ ist $v_i \wedge \alpha = 0$, da v_i wiederholt vorkommt. Also ist $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_p) \subset \operatorname{Ker}(f_\alpha)$ und der Kern hat mindestens Dimension p. Wir ergänzen die v_j zu einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V. Für $p+1 \leqslant i \leqslant n$ ist dann

$$v_i \wedge \alpha = (-1)^p v_1 \wedge \ldots \wedge v_p \wedge v_i$$

einer der Basisvektoren (assoziiert zur Basis $\{v_j\}$) von $\Lambda^{p+1} V$, also spannen die Bilder $v_i \wedge \alpha$ für $p+1 \leqslant i \leqslant n$ einen Unterraum von $\Lambda^{p+1} V$ der Dimension $n-p$ auf. Nach der Dimensionsformel hat denn $\operatorname{Ker}(f_\alpha)$ Dimension höchstens p, also insgesamt Dimension gleich p.

(b) Sei $(e_1, \ldots, e_n)$ eine Basis von V, sodass $(e_1, \ldots, e_k)$ eine Basis von $\operatorname{Ker}(f_\alpha)$ ist für ein $0 \leqslant k \leqslant n$. Die induzierte Basis von $\Lambda^p V$ besteht dann aus

$$e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \quad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n.$$

Folglich existieren eindeutige Koeffizienten $\alpha_{i_1, \ldots, i_p}$ mit

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}.$$

Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ sind die Vektoren

$$e_j \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \quad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \text{ mit } j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}$$

bis auf Vorzeichen Teil der von $(e_1, \ldots, e_n)$ induzierten Basis von $\Lambda^{p+1} V$, also insbesondere linear unabhängig. Für jedes $j \in \{1, \ldots, k\}$ gilt

$$0 = e_j \wedge \alpha = \sum_{\substack{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \\ j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}}} \alpha_{i_1 \ldots i_p} e_j \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p},$$

mit der linearen Unabhängigkeit von $\{e_j \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}\}_{j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}}$ also

$$\alpha_{i_1 \ldots i_p} = 0 \quad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n \text{ mit } j \notin \{i_1, \ldots, i_p\}.$$

Anders gesagt bedeutet dies

$$j \in \{i_1, \dots, i_p\} \qquad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n \text{ mit } \alpha_{i_1 \dots i_p} \neq 0.$$

Da $j \in \{1, \dots, k\}$ beliebig war, gilt also

$$\{1, \dots, k\} \subset \{i_1, \dots, i_p\} \qquad \text{für alle } 1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n \text{ mit } \alpha_{i_1 \dots i_p} \neq 0.$$

Wegen $\alpha \neq 0$ gibt es mindestens ein solches $\alpha_{i_1 \dots i_p} \neq 0$, und für dieses folgt $\dim \operatorname{Ker}(f_\alpha) = k \leqslant p$. Andererseits haben wir jetzt

$$\alpha = e_1 \wedge \dots \wedge e_k \wedge \eta$$

für ein $\eta \in \Lambda^{p-k} V \setminus \{0\}$.
Ist $k = p$, dann ist $\eta \in \Lambda^0 V = K$ ein Skalar, also $\alpha = (\eta v_1) \wedge \dots \wedge v_p$ rein.