Musterlösung Probeprüfung

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Wie viele mögliche Jordansche Normalformen hat ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $P_F = -(t-1)^5$? (JNF, die sich nur durch Umordnung der Zeilen und Spalten unterscheiden sollen dabei als gleich gelten.)

   (a) 1
   (b) 6
   (c) 7
   (d) 8

   (II) Welche der folgenden Aussagen ist die stärkste richtige für alle Paare von Endomorphismen $F, G \in \mathrm{End}(V)$ des endlich dimensionalen K-Vektorraumes V.

   (a) $P_F = P_G \Rightarrow F$ und G sind ähnlich.
   (b) $P_F = P_G$ und P_F zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow F$ und G sind ähnlich.
   (c) $P_F = P_G$ und P_F zerfällt in Linearfaktoren und $\dim \mathrm{Ker}\, F^k = \dim \mathrm{Ker}\, G^k$ für alle $k \Rightarrow F$ und G sind ähnlich.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (III) Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $U \in U(n)$ und für alle $n \geqslant 2$?

   (a) Ist U hermitesch, so gilt $U = \pm E_n$.
   (b) Hat U nur reelle Einträge, so ist U hermitesch.
   (c) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von U.
   (d) Keine der obigen Aussagen ist richtig für alle n und alle $U \in U(n)$.

   (IV) Sei K ein beliebiger Körper, $K[t]$ der Polynomring und $P \in K[t]$ ein beliebiges Polynom positiven Grades. Welche Aussage ist richtig für alle solchen K und P?

   (a) Es gibt einen K-Vektorraum V, ein $a \in K$ und ein diagonalisierbares $F \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P = aP_F$.
   (b) Es gibt einen K-Vektorraum V, ein $a \in K$ und ein trigonalisierbares $F \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P = aP_F$.
   (c) Es gibt einen K-Vektorraum V, ein $a \in K$ und ein $F \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P = aM_F$ mit M_F dem Minimalpolynom von F.
   (d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

   (V) Welche der folgenden Matrizen sind (im Allgemeinen) <u>nicht</u> positiv definit?

(a) $A^T A$ für $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A \neq 0$.

(b) $\sum_{j=1}^{N} a_j v_j v_j^T$, wobei $a_1, \ldots, a_N > 0$ und die $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem sind.

(c) $E_n - uu^T$ mit $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| < 1$.

(d) Matrizen der Form

$$A_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & 1 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $\det(A_{\lambda,n}) > 0$ für alle n.

(VI) Welche Aussage ist richtig?

(a) Zu jeder symmetrischen Matrix $0 \neq A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ gibt es ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und eine Basis, bezüglich derer A die Matrix des Skalarproduktes ist.

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine positiv definite Matrix und setze

$$\|v\|_A = \sqrt{v^\dagger A v}$$

für $v \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$

$$\|v - w\|_A \geqslant \|v\|_A - \|w\|_A.$$

(c) Zwei beliebige Bilinearformen s_1, s_2 auf dem $\mathbb{R}^n$ sind gleich genau dann wenn $s_1(v, v) = s_2(v, v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(d) Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf dem $\mathbb{C}^n$ gibt es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$, so dass

$$s(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

(VII) Der Raum $\wedge^4 \mathbb{R}^6$ hat die Dimension

(a) 2

(b) 10

(c) 15

(d) 6^4

(VIII) Das Tensorprodukt zweier K-Vektorräume V und W ist ein K-Vektorraum $V \otimes_K W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\kappa : V \times W \to V \otimes_K W$, welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden K-Vektorraum U und jede bilineare Abbildung $\varphi : V \times W \to U$ existiert ...

(a) ein Vektorraum $V \otimes_K W$ und eindeutige lineare Abbildungen $V \times W \to V \otimes_K W$ und $V \otimes_K W \to U$ deren Komposition φ ist.

(b) eine eindeutige lineare Abbildung $U \to V \otimes_K W$ deren Komposition mit φ gleich κ ist.

(c) eine eindeutige lineare Abbildung $V \otimes_K W \to U$ deren Komposition mit κ gleich φ ist.

(d) eine eindeutige lineare Abbildung $V \otimes_K W \to U$ deren Bild gleich dem Bild von φ ist.

(IX) Seien V_1, V_2, V_3, W euklidische Vektorräume und seien $F_i : V_i \to W$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Abbildungen $V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ ist multilinear?

(a) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto F_1(v_1) + F_2(v_2) + F_3(v_3)$

(b) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto \langle F_1(v_1), F_2(v_2) \rangle \cdot F_3(v_3)$

(c) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto F_1(v_1)$

(d) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto \langle F_1(v_1), F_2(v_2) \rangle \cdot \langle F_1(v_1), F_3(v_3) \rangle \cdot w$, für ein fixiertes $w \in W$.

(X) Die Singulärwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ sind

(a) 3 und $-i$.

(b) $3 - i$ und $3 + i$.

(c) $\sqrt{3}$ und 1.

(d) $\sqrt{10}$.

Lösung: (c), (d), (c), (c), (a), (b), (c), (c), (b), (d)

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *(5 Punkte)* Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A. Was ist das Minimalpolynom M_A?

(b) *(5 Punkte)* Berechnen Sie A^{2020}.

(c) *(5 Punkte)* Prüfen Sie, ob A ähnlich ist zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom berechnet sich als

$$P_A(t) = -(t-1)^2(t-3).$$

Direkte Berechnung von $\mathrm{Ker}(A - E_3)$ zeigt, dass der Eigenraum zum Eigenwert 1 aufgespannt ist durch $(1,0,2)^T$. Daher ist A nicht diagonalisierbar und hat einen Jordan Block der Größe 2 zum Eigenwert 1. Da 3 einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, finden wir die Jordansche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Um in Teilaufgabe (b) die Potenz A^{2020} zu berechnen, bestimmen wir außerdem je eine Basis des Hauptraums und somit die Basiswechselmatrix S, so dass

$$A = SJS^{-1}.$$

Basis von $\mathrm{Ker}(A - E_3)^2$ ist z.B. $(1,0,2)^T, (0,1,0)^T$. Da jede Zeilensumme von A gleich 3 ist, ist $(1,1,1)^T$ Eigenvektor zum Eigenwert 3 und spannt daher den Eigenraum auf. Die Basiswechselmatrix ist also

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit Inverser

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Seien

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so dass also $J = D + N$ und D und N kommutieren. Da N^2 und $DN = ND = N$ folgt für alle $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} A^n &= SJ^nS^{-1} = S\big(D^n + n \cdot N\big)S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -1 + 2 \cdot 3^n - 2n & n & 1 - 3^n + n \\ -2 + 2 \cdot 3^n & 1 & 1 - 3^n \\ -2 + 2 \cdot 3^n - 4n & 2n & 2 - 3^n + 2n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir setzen schließlich $n = 2020$.

(c) Hier muss nicht einmal das charakteristische Polynom o.Ä. berechnet werden: Da alle Zeilensummen von B gleich 2 sind, ist 2 Eigenwert mit Eigenvektor $(1, 1, 1)^T$. Jedoch ist 2 kein Eigenwert von A und somit können A und B nicht ähnlich zueinander sein.

3. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 & 1 \\ -i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

(b) *(7 Punkte)* Sei $\langle , \rangle_A$ das durch A beschriebene Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

(c) *(4 Punkte)* Sei B eine invertierbare Matrix, so dass $BA = A(\bar{B}^{-1})^T$. Zeigen Sie, dass B diagonalisierbar ist. Was kann man über die möglichen Eigenwerte von B aussagen?

Lösung:

(a) Die Matrix A ist hermitsch; wir verwenden das Hauptminorenkriterium um zeigen, dass A positiv definit ist. Die Determinanten der führenden Hauptminoren sind

$$2, \quad 3, \quad 6, \quad 12,$$

und sind alle positiv, daher ist A positiv definit.

(b) Zunächst sieht man, dass der dritte Standardbasisvektor e_3 orthogonal zu e_1, e_2 und e_4 ist. Wir setzen also schon einmal $v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_3$. Nun finden wir eine ONB für den

Unterraum aufgespannt durch e_1, e_2, e_4:

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_1\,, \\
v_2' &= e_2 - \langle e_2, v_1\rangle_A v_1 = \Big(\frac{i}{2}, 1, 0, 0\Big)\,, \|v_2'\|^2 = \frac{3}{2}\,, \\
v_2 &= \frac{v_2'}{\|v_2'\|} = \sqrt{\frac{2}{3}} v_2'\,, \\
v_4' &= e_4 - \langle e_4, v_1\rangle_A v_1 - \langle e_4, v_2\rangle_A v_2 = e_4 - \frac{1}{2} e_1 - \frac{2}{3}\langle e_4, v_2'\rangle_A v_2' \\
&= \Big(-\frac{2}{3}, i/3, 0, 1\Big)\,, \|v_4'\|^2 = \frac{4}{3} \\
v_4 &= \frac{v_4'}{\|v_4'\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_4'\,.
\end{aligned}$$

Zusammen bilden $v_1, \dots, v_4$ eine ONB bzgl. $\langle\,,\rangle_A$.

(c) Die Bedingung ist äquivalent zu

$$BA\bar{B}^T = A\,,$$

das heißt B ist unitär bzgl. das Skalarprodukts $\langle\,,\rangle_A$. Aus dem Spektralsatz folgt, dass B diagonalisierbar ist. Die Eigenwerte haben alle Betrag 1.

4. Für $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}_A :\ \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) &\to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) \\
X &\mapsto AX - XA.
\end{aligned}$$

(a) *(4 Punkte)* Sei A nilpotent. Zeigen Sie, dass dann ad_A auch nilpotent ist.

(b) *(4 Punkte)* Sei das Minimalpolynom von A

$$M_A = (t - \lambda)^r$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für das Minimalpolynom von ad_A gilt

$$M_{\mathrm{ad}_A} = t^{2r-1}\,.$$

(c) *(4 Punkte)* Sei nun A wie in (b) mit $r = n$. Berechnen Sie den Rang von ad_A.

(d) *(3 Punkte)* Sei A wie in (c) mit $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Jordansche Normalform von ad_A aus jeweils einem Jordanblock der Grössen 1 und 3 besteht.

Bemerkung: Teilaufgabe (d) kann man auch für allgemeines n lösen, die Jordansche Normalform besteht dann aus $(n-1)$ *Jordanblöcken der Form* $J_{n-1}(0)$ *und einem Jordanblock der Form* $J_{2n-1}(0)$.

Lösung:

(a) Sei $n \geqslant 0$. Per Induktion lässt sich zeigen, dass

$$\operatorname{ad}_A^n X = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} A^{n-j} X A^j \,.$$

Alternativ sei L_A die Linksmultiplikation mit A und R_A die Rechtmultiplikation, also $L_A(X) = AX$, $R_A(X) = XA$. Dann kommutieren L_A und R_A, und $\operatorname{ad}_A = L_A - R_A$, also ist nach der binomischen Formel

$$\operatorname{ad}_A^n X = (L_A - R_A)^n(X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (L_A^{n-j} R_A^j)(X) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} A^{n-j} X A^j \,.$$

Falls nun A nilpotent ist, also $A^j = 0$ für alle $j \geqslant r$, dann ist $\operatorname{ad}_A^n = 0$ für alle $n \geqslant 2r - 1$.

(b) Sei A mit Minimalpolynom $M_A(t) = (t - \lambda)^r$. Dann ist $B = A - \lambda E$ nilpotent, wobei E die Einheitsmatrix ist, und nach Teilaufgabe (a) ist auch ad_B nilpotent. Es ist aber

$$\operatorname{ad}_B(X) = (A - \lambda E)X - X(A - \lambda E) = \operatorname{ad}_A(X)$$

und nach der Lösung Teilaufgabe (a) folgt, dass

$$M_{\operatorname{ad}_A} \mid t^{2r-1} \,.$$

Da die einzigen Teiler von t^{2r-1} Potenzen von t sind, können wir annehmen, dass $M_{\operatorname{ad}_A} = t^k$. Da $A^{r-1} \neq 0$ gibt es $x \in \mathbb{C}^n$ mit $A^{r-1}x \neq 0$. Wir wählen nun $X \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$, so dass $XA^{r-1}x = x$, dann ist

$$\begin{aligned} \operatorname{ad}_A^{2r-2} x &= \sum_{j=0}^{2r-2} (-1)^j \binom{2r-2}{j} A^{2r-2-j} X A^j \\ &= (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} A^{r-1} X A^{r-1} x \\ &= (-1)^{r-1} \binom{2r-2}{r-1} A^{r-1} x \neq 0 \,, \end{aligned}$$

daher $\operatorname{ad}_A^{2r-2} \neq 0$, also insgesamt $M_{\operatorname{ad}_A} = t^{2r-1}$.

(c) Wir zeigen, dass der Rang von ad_A genau $n^2 - n$ ist. Äquivalent zeigen wir, dass $\dim \operatorname{Ker}(\operatorname{ad}_A) = n$. Nach Teilaufgabe (b) können wir annehmen, dass A nilpotent ist. Wir bemerken, dass für eine Basiswechselmatrix S gilt

$$\{X \mid SAS^{-1}X - XSAS^{-1} = 0\} = S\{X \mid AX - XA = 0\}S^{-1} \,,$$

insbesondere also beide Räume von gleicher Dimension. Weiterhin ist wegen $r = n$ das charakteristische Polynom von A gleich dem Minimalpolynom und wir könenn einen zyklischen Vektor v finden, d.h. $v, Av, \dots, A^{n-1}v$ bilden eine Basis. Wir können also annehmen, dass

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Für obiges A ist der Kern aber der Raum der oberen Dreiecks Toeplitz Matrizen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_A) &= \{X \mid AX = XA\} \\ &= \{X = (x_{i,j}) \text{ obere Dreiecksmatrix } \mid x_{i,j} = x_{i+1,j+1} \text{ für alle } i, j\}. \end{aligned}$$

Eine Basis ist gegeben durch die Matrizen mit Einsen auf der k-ten oberen Nebendiagonalen für $k = 0, \dots, n-1$:

$$A^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & 0 & \end{pmatrix}.$$

Insbesondere hat $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_A)$ also Dimension n. Alternativ zeigen wir unten in Teilaufgabe (d) direkt, dass ad_A Rang $n(n-1)$ hat.

(d) Sei $V = \mathbb{C}^n$ mit Basis $e_1, \dots, e_n$, sei $e_1^*, \dots, e_n^*$ die assoziierte Basis von V^* und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir identifizieren den Raum der Matrizen $\mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$, oder äquivalent die Endomorphismen von V, mit $V \otimes V^*$. Die lineare Abbildung ad_A^k ist dann gerade

$$\mathrm{ad}_A^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} A^j \otimes (A^T)^{k-j}.$$

Dies lässt sich direkt auf der Basis $(e_i \otimes e_j^*)_{ij}$ von $V \otimes V^*$ überprüfen.

Zur Berechnung der Jordanschen Normalform bestimmen wir den Rang von ad_A^k für $k \geqslant 1$. Die darstellende Matrix bezüglich obiger Basis von $V \otimes V^*$ ist eine $n^2 \times n^2$ Block-untere Dreiecksmatrix mit A^k auf der Diagonalen, $-A^{k-1}$ auf der ersten Nebendiagonalen nach unten, $+A^{k-2}$ auf der zweiten usw. In unserem Fall $n = 2$ müssen wir die Ränge von ad_A^k berechnen für $k = 1, 2, 3, 4$. Aus der Formel der Lösung von (a) sehen wir, dass $\mathrm{ad}_A^2 = \mathrm{ad}_A^3 = 0$. Der Rang von ad_A^1 wurde in (c) berechnet und ist 2. Wir müssen also nur noch den Rang von ad_A^2 ausrechnen, also in Matrizenform von der Matrix

$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

Dieser ist offensichtlich 1, da es genau eine Zeile ungleich 0 gibt. Die Dimensionen der Kerne von ad_A^k sind also $0, 2, 3, 4, 4, \dots$ für $k = 0, 1, 2, \dots$. Wir berechnen also die Anzahl s_k der Jordanblöcke der Grösse k zu

$$\begin{aligned} s_1 &= 2 \cdot 2 - 0 - 3 = 1 \\ s_2 &= 2 \cdot 3 - 2 - 4 = 0 \\ s_3 &= 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1 \\ s_k &= 2 \cdot 4 - 4 - 4 = 0 \quad \text{für } k \geqslant 4. \end{aligned}$$

Will man den Fall für allgemeines n zeigen (wie in der Bemerkung) muss man etwas mehr arbeiten. Betrachte dazu allgemein die Matrix von ad_A^k wie oben. Man kann dann durch elementare Zeilen/ Spaltenumformungen die Einsen in jeder Spalte unterhalb der jeweils führenden 1 eliminieren und alle -1 zu $+1$ machen. Man erhält eine Matrix wie folgt: A^k auf der Blockdiagonalen, und sonst Nullen, außer dass im (i, j)-Block mit $i > j$ ein Eintrag 1 in der Position $(1, k - (i - j - 1))$ steht, sofern $1 \leqslant k - (i - j - 1) \leqslant n$. Die Matrix ist damit in Zeilenstufenform, bis auf Umordnung und zur Bestimmung des Ranges müssen nur noch die Zeilen $\neq 0$ gezählt werden. Man muss dazu eine Fallunterscheidung machen für $k < n$ und $k \geqslant n$.

$k \geqslant n$: Die Blockdiagonale ist 0. Man hat dann noch $n - 1 - (k - n) = 2n - 1 - k$ Zeilen $\neq 0$, also ist der Rang $2n - 1 - k$, bzw. 0 falls $k \geqslant 2n - 1$.

$k < n$: Die Blockdiagonale trägt $n(n - k)$ Einsen bei. Die anderen 1 stehen links davon und spielen daher keine weitere Rolle. Also ist der Rang $n(n - k)$.

Seien R_k die Ränge, dann ist die Anzahl Jordanblöcke der Grösse k

$$-2R_k + R_{k-1} + R_{k+1}.$$

Dieser diskrete Laplace verschwindet in den linearen Bereichen, und ist an den beiden Knickstellen gerade die Änderung der Steigung. Die Anzahl der Jordanblöcke der Größe $n-1$ ist daher $n-1$ und die Anzahl der Jordanblöcke der Größe ist $2n-1$ ist 1.

5. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei p_U der orthogonale Projektor auf U, dass heißt $p_U(u) = u$ für $u \in U$ und $p_U(w) = 0$ für $w \in U^\perp$.

   (a) *(7 Punkte)* Betrachten Sie die lineare Abbildung $F|_U : U \to V$. Finden Sie einen Ausdruck für die adjungierte Abbildung $(F|_U)^{ad}$ durch F^{ad} und p_U.

(b) *(8 Punkte)* Sei $v \in V$, $v \notin U$ und $(u_1, \dots, u_k)$ eine ONB von U und $W = U + \operatorname{span} v$. Finden Sie einen Ausdruck für den othogonalen Projektor p_W.

Lösung:

(a) Der orthogonale Projektor p_U wurde bereits in Serie 5, Aufgabe 1 besprochen. Dort wurde auch gezeigt, dass p_U selbstadjungiert ist. Dies kann man schnell auch nochmals zeigen: Wir zerlegen $V = U \oplus U^\perp$, und betrachten entsprechende Zerlegungen von $v_1, v_2 \in V$, $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$. Dann gilt

$$\langle v_1, p_U v_2 \rangle = \langle u_1 + w_1, u_2 \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_1, v_2 \rangle = \langle p_U v_1, v_2 \rangle.$$

Für $u \in U, v \in V$ finden wir weiter

$$\begin{aligned} \langle F|_U(u), v \rangle &= \langle (F \circ p_U)(u), v \rangle \\ &= \langle u, (p_U^{\mathrm{ad}} \circ F^{\mathrm{ad}})(v) \rangle \\ &= \langle u, (p_U \circ F^{\mathrm{ad}})(v) \rangle , \end{aligned}$$

also $(F|_U)^{\mathrm{ad}} = p_U \circ F^{\mathrm{ad}}$.

(b) Da $v \notin U$ bilden $u_1, \dots, u_k, v$ eine Basis von W. Die Vektoren $u_1, \dots, u_k$ sind bereits orthonormal, also wenden wir Gram–Schmidt nur noch auf v an:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{k+1} &= v - \langle v, u_1 \rangle u_1 - \cdots - \langle v, u_k \rangle u_k , \\ u_{k+1} &= \frac{\tilde{u}_{k+1}}{\|\tilde{u}_{k+1}\|} . \end{aligned}$$

Nun bilden $u_1, \dots, u_{k+1}$ eine ONB und die orthogonale Projektion ist gegeben durch

$$p_W(w) = \langle w, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle w, u_{k+1} \rangle u_{k+1} .$$

6. (a) *(9 Punkte)* Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer schiefsymmetrischen Bilinearform ω, die nicht-entartet ist (d.h. dass aus $\omega(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ stets $v = 0$ folgt). Eine Basis $(v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n)$ von V heißt Darboux-Basis, wenn gilt: $\omega(v_i, v_j) = \omega(w_i, w_j) = 0$ und $\omega(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale symplektische Vektorraum eine Darboux-Basis besitzt (und damit insbesondere gerade Dimension hat).

(b) *(3 Punkte)* Sei V ein Vektorraum mit symplektischer Form ω wie in (a). Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to V^* \\ v &\mapsto (w \mapsto \omega(v, w)) \end{aligned}$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

(c) *(3 Punkte)* Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ mit dualer Abbildung $F^* \in \mathrm{End}(V^*)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F' = \Phi^{-1} \circ F^* \circ \Phi \in \mathrm{End}(V)$ erfüllt:

$$\omega(v, Fw) = \omega(F'v, w)\,.$$

Lösung:

(a) Der Beweis verläuft parallel zur Konstruktion einer ONB. Wir zeigen allgemeiner, gegeben einen Unterraum $W \subset V$ mit Darboux-Basis $(v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m)$ können wir diese zu einer Darboux-Basis von V ergänzen.

Falls $W \subsetneq V$ sei $v \in V \setminus W$ und definiere

$$\begin{aligned} v_{m+1} = v &- \omega(v_1, v) w_1 - \cdots - \omega(v_m, v) w_m \\ &- \omega(v, w_1) v_1 - \cdots - \omega(v, w_m) v_m\,. \end{aligned}$$

Dann ist per Konstruktion $\omega(v_{m+1}, w_j) = \omega(v_{m+1}, v_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, m$. Da ω schiefsymmetrisch ist, ist außerdem $\omega(v_{m+1}, v_{m+1}) = 0$. Da ω aber nicht nicht-entartet ist, muss $\mathrm{span}\big(W, v_{m+1}\big) \subsetneq V$. Sei $w \in V \setminus \mathrm{span}\big(W, v_{m+1}\big)$ mit $\omega(v_{m+1}, w) \neq 0$ und definiere analog wie oben:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{m+1} = w &- \omega(v_1, w) w_1 - \cdots + \omega(v_m, w) w_m \\ &- \omega(w, w_1) v_1 - \cdots - \omega(w, w_m) v_m - \omega(w, v_{m+1}) v_{m+1}\,. \end{aligned}$$

Dann ist wie oben $\omega(\tilde{w}_{m+1}, v_j) = \omega(\tilde{w}_{m+1}, w_j) = 0$ für alle $j = 1, \dots, m$. Allerdings ist

$$\omega(v_{m+1}, \tilde{w}_{m+1} = \omega(v_{m+1}, w) \neq 0\,,$$

und wir können schließlich w_{m+1} definieren durch

$$w_{m+1} = \frac{\tilde{w}_{m+1}}{\omega(v_{m+1}, w)}\,.$$

Dann ist $\omega(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ für alle $j = 1, \dots, m+1$ und wir schließen per Induktion.

(b) Die Linearität der Abbildung Φ folgt direkt aus der Multilinearität von ω. Die Bedingung, dass ω nicht-entartet ist besagt genau, dass Φ injektiv ist: Für $v \in W$ sei $w \in W$, so dass $\omega(v, w) \neq 0$, dann kann also die Linearform

$$V \to \mathbb{R}\,, w \mapsto \omega(v, w)$$

nicht gänzlich Null sein. Da der Dualraum V^* von gleicher Dimension ist wie V, ist Φ ein Isomorphismus

(c) Die Abbildung F' ist das Analogen zur adjungierten Abbildung für Euklidische Vektorräume. Man sieht direkt:

$$\begin{aligned} \omega(v, Fw) &= \Phi(v)(Fw) = (F^* \circ \Phi)(v)(w) \\ &= \Phi(F'v)(w) = \omega(F'v, w)\,. \end{aligned}$$