Probeprüfung

1. *(20 Punkte)* Kreuzen Sie auf dem Abgabeblatt ihre Antwort an. Pro Teilaufgabe ist genau eine der vier Antwortmöglichkeiten richtig. Für jede richtig beantwortete Teilaufgabe erhalten Sie 2 Punkte, sonst 0 Punkte. Bei dieser Aufgabe müssen Sie die Antworten nicht begründen.

   (I) Wie viele mögliche Jordansche Normalformen hat ein Endomorphismus $F \in \mathrm{End}(V)$ mit charakteristischem Polynom $P_F = -(t-1)^5$? (JNF, die sich nur durch Umordnung der Zeilen und Spalten unterscheiden sollen dabei als gleich gelten.)

   (a) 1
   (b) 6
   (c) 7
   (d) 8

   (II) Welche der folgenden Aussagen ist die stärkste richtige für alle Paare von Endomorphismen $F, G \in \mathrm{End}(V)$ des endlich dimensionalen K-Vektorraumes V.

   (a) $P_F = P_G \Rightarrow F$ und G sind ähnlich.
   (b) $P_F = P_G$ und P_F zerfällt in Linearfaktoren $\Rightarrow F$ und G sind ähnlich.
   (c) $P_F = P_G$ und P_F zerfällt in Linearfaktoren und $\dim \mathrm{Ker}\, F^k = \dim \mathrm{Ker}\, G^k$ für alle $k \Rightarrow F$ und G sind ähnlich.
   (d) Keine der Aussagen (a)-(c) ist richtig.

   (III) Welche der folgenden Aussagen gilt für alle $U \in U(n)$ und für alle $n \geqslant 2$?

   (a) Ist U hermitesch, so gilt $U = \pm E_n$.
   (b) Hat U nur reelle Einträge, so ist U hermitesch.
   (c) Es gibt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von U.
   (d) Keine der obigen Aussagen ist richtig für alle n und alle $U \in U(n)$.

   (IV) Sei K ein beliebiger Körper, $K[t]$ der Polynomring und $P \in K[t]$ ein beliebiges Polynom positiven Grades. Welche Aussage ist richtig für alle solchen K und P?

   (a) Es gibt einen K-Vektorraum V, ein $a \in K$ und ein diagonalisierbares $F \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P = aP_F$.
   (b) Es gibt einen K-Vektorraum V, ein $a \in K$ und ein trigonalisierbares $F \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P = aP_F$.
   (c) Es gibt einen K-Vektorraum V, ein $a \in K$ und ein $F \in \mathrm{End}(V)$ so dass $P = aM_F$ mit M_F dem Minimalpolynom von F.
   (d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

   (V) Welche der folgenden Matrizen sind (im Allgemeinen) <u>nicht</u> positiv definit?

(a) $A^T A$ für $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ mit $A \neq 0$.

(b) $\sum_{j=1}^{N} a_j v_j v_j^T$, wobei $a_1, \dots, a_N > 0$ und die $v_1, \dots, v_N \in \mathbb{R}^n$ ein Erzeugendensystem sind.

(c) $E_n - uu^T$ mit $u \in \mathbb{R}^n$, $\|u\| < 1$.

(d) Matrizen der Form

$$A_{\lambda,n} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ 1 & \lambda & 1 & & & \\ & 1 & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & \lambda & 1 \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ so dass $\det(A_{\lambda,n}) > 0$ für alle n.

(VI) Welche Aussage ist richtig?

(a) Zu jeder symmetrischen Matrix $0 \neq A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ gibt es ein Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ und eine Basis, bezüglich derer A die Matrix des Skalarproduktes ist.

(b) Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$ eine positiv definite Matrix und setze

$$\|v\|_A = \sqrt{v^\dagger A v}$$

für $v \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{C}^n$

$$\|v - w\|_A \geqslant \|v\|_A - \|w\|_A.$$

(c) Zwei beliebige Bilinearformen s_1, s_2 auf dem $\mathbb{R}^n$ sind gleich genau dann wenn $s_1(v, v) = s_2(v, v)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(d) Zu jeder hermiteschen Sesquilinearform s auf dem $\mathbb{C}^n$ gibt es eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ des $\mathbb{C}^n$, so dass

$$s(v_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

(VII) Der Raum $\wedge^4 \mathbb{R}^6$ hat die Dimension

(a) 2

(b) 10

(c) 15

(d) 6^4

(VIII) Das Tensorprodukt zweier K-Vektorräume V und W ist ein K-Vektorraum $V \otimes_K W$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung $\kappa : V \times W \to V \otimes_K W$, welche die folgende universelle Eigenschaft erfüllt: Für jeden K-Vektorraum U und jede bilineare Abbildung $\varphi : V \times W \to U$ existiert ...

(a) ein Vektorraum $V \otimes_K W$ und eindeutige lineare Abbildungen $V \times W \to V \otimes_K W$ und $V \otimes_K W \to U$ deren Komposition φ ist.
(b) eine eindeutige lineare Abbildung $U \to V \otimes_K W$ deren Komposition mit φ gleich κ ist.
(c) eine eindeutige lineare Abbildung $V \otimes_K W \to U$ deren Komposition mit κ gleich φ ist.
(d) eine eindeutige lineare Abbildung $V \otimes_K W \to U$ deren Bild gleich dem Bild von φ ist.

(IX) Seien V_1, V_2, V_3, W euklidische Vektorräume und seien $F_i : V_i \to W$ für $1 \leqslant i \leqslant 3$ lineare Abbildungen. Welche der folgenden Abbildungen $V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ ist multilinear?

(a) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto F_1(v_1) + F_2(v_2) + F_3(v_3)$
(b) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto \langle F_1(v_1), F_2(v_2)\rangle \cdot F_3(v_3)$
(c) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto F_1(v_1)$
(d) $(v_1, v_2, v_3) \mapsto \langle F_1(v_1), F_2(v_2)\rangle \cdot \langle F_1(v_1), F_3(v_3)\rangle \cdot w$, für ein fixiertes $w \in W$.

(X) Die Singulärwerte der Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & -i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$ sind

(a) 3 und $-i$.
(b) $3 - i$ und $3 + i$.
(c) $\sqrt{3}$ und 1.
(d) $\sqrt{10}$.

2. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(5 Punkte)* Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A. Was ist das Minimalpolynom M_A?

   (b) *(5 Punkte)* Berechnen Sie A^{2020}.

   (c) *(5 Punkte)* Prüfen Sie, ob A ähnlich ist zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 9 & -2 \\ -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 & 1 \\ -i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

   (b) *(7 Punkte)* Sei $\langle , \rangle_A$ das durch A beschriebene Skalarprodukt auf dem $\mathbb{C}^4$. Finden Sie eine Orthonormalbasis bezüglich dieses Skalarproduktes.

   (c) *(4 Punkte)* Sei B eine invertierbare Matrix, so dass $BA = A(\bar{B}^{-1})^T$. Zeigen Sie, dass B diagonalisierbar ist. Was kann man über die möglichen Eigenwerte von B aussagen?

4. Für $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ eine Matrix betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_A \colon \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) &\to \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C}) \\ X &\mapsto AX - XA. \end{aligned}$$

   (a) *(4 Punkte)* Sei A nilpotent. Zeigen Sie, dass dann ad_A auch nilpotent ist.

   (b) *(4 Punkte)* Sei das Minimalpolynom von A

$$M_A = (t - \lambda)^r$$

   mit $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für das Minimalpolynom von ad_A gilt

$$M_{\mathrm{ad}_A} = t^{2r-1}.$$

   (c) *(4 Punkte)* Sei nun A wie in (b) mit $r = n$. Berechnen Sie den Rang von ad_A.

   (d) *(3 Punkte)* Sei A wie in (c) mit $n = 2$. Zeigen Sie, dass die Jordansche Normalform von ad_A aus jeweils einem Jordanblock der Grössen 1 und 3 besteht.

Bemerkung: Teilaufgabe (d) kann man auch für allgemeines n lösen, die Jordansche Normalform besteht dann aus $(n-1)$ *Jordanblöcken der Form* $J_{n-1}(0)$ *und einem Jordanblock der Form* $J_{2n-1}(0)$.

5. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer Vektorraum, $U \subset V$ ein Untervektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Sei p_U der orthogonale Projektor auf U, dass heißt $p_U(u) = u$ für $u \in U$ und $p_U(w) = 0$ für $w \in U^\perp$.

   (a) *(7 Punkte)* Betrachten Sie die lineare Abbildung $F|_U : U \to V$. Finden Sie einen Ausdruck für die adjungierte Abbildung $(F|_U)^{ad}$ durch F^{ad} und p_U.

   (b) *(8 Punkte)* Sei $v \in V$, $v \notin U$ und $(u_1, \ldots, u_k)$ eine ONB von U und $W = U + \operatorname{span} v$. Finden Sie einen Ausdruck für den othogonalen Projektor p_W.

6. (a) *(9 Punkte)* Ein *symplektischer Vektorraum* ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer schiefsymmetrischen Bilinearform ω, die nicht-entartet ist (d.h. dass aus $\omega(v, w) = 0$ für alle $w \in V$ stets $v = 0$ folgt). Eine Basis $(v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n)$ von V heißt Darboux-Basis, wenn gilt: $\omega(v_i, v_j) = \omega(w_i, w_j) = 0$ und $\omega(v_i, w_j) = \delta_{ij}$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass jeder endlichdimensionale symplektische Vektorraum eine Darboux-Basis besitzt (und damit insbesondere gerade Dimension hat).

   (b) *(3 Punkte)* Sei V ein Vektorraum mit symplektischer Form ω wie in (a). Zeigen Sie, dass die Zuordnung

$$\begin{aligned} \Phi : V &\to V^* \\ v &\mapsto (w \mapsto \omega(v, w)) \end{aligned}$$

   ein Vektorraumisomorphismus ist.

   (c) *(3 Punkte)* Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ mit dualer Abbildung $F^* \in \mathrm{End}(V^*)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F' = \Phi^{-1} \circ F^* \circ \Phi \in \mathrm{End}(V)$ erfüllt:

$$\omega(v, Fw) = \omega(F'v, w)\,.$$