Serie 1

Trigonalisierung, Minimalpolynom

1. Ein kommutativer Ring mit Eins R heisst *Integritätsring*, falls er nullteilerfrei ist, also falls gilt:
$$\forall p, q \in R : (pq = 0 \Rightarrow p = 0 \vee q = 0) .$$
Typische Beispiele sind die ganzen Zahlen $R = \mathbb{Z}$ oder Körper $R = K$. Sei nun R ein Integritätsring.

   (a) Zeigen Sie, dass der Ring der Polynome $R[t]$ ein Integritätsring ist.

   (b) Sei $n \geqslant 1$ und $f \in R[t]$, so dass $f \mid t^n$. Zeigen Sie, dass $f = \alpha t^m$ für ein $\alpha \in R^*$ und $m \geqslant 0$.

   (c) (Eisenstein Kriterium "light") Sei nun $f \in \mathbb{Z}[t]$ von der Form
$$f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0 .$$
Weiter sei p eine Primzahl, so dass $p \mid a_i$ für alle i und $p^2 \nmid a_0$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathbb{Z}[t]$ *irreduzibel* ist, d.h., gilt $f = gh$ für $g, h \in \mathbb{Z}[t]$, so muss $g = \pm 1$ oder $h = \pm 1$ sein.
Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $f = gh$ in $\mathbb{F}_p[t]$.

   Bemerkung: Allgemein nennt man ein Element f eines kommutativen Ringes R irreduzibel*, falls aus $f = pq$ (mit $p, q \in R$) folgt, dass p oder q invertierbar ist.*

2. Für $n \geqslant 1$ und einen beliebigen Parameter $\lambda \in K$ betrachten wir die $n \times n$-Matrix
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix} .$$
Bestimmen Sie A^k für alle $k \geqslant 0$.

3. (a) Trigonalisieren Sie folgende Matrix über $\mathbb{Q}$:
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 5 & -2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

(b) Ist die Trigonalisierung einer Matrix eindeutig?

4. Seien A, $B \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ ähnliche Matrizen. Zeigen Sie, dass A und B das gleiche Minimalpolynom haben.

5. Sei p eine Primzahl und $n > 0$.

   (a) Zeigen Sie, dass das Polynom $t^n - p$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.
   Bemerkung: In der Algebra I lernen Sie das Gauß Lemma kennen, welches die Irreduzibilität obigen Polynoms über $\mathbb{Q}$ impliziert.

   (b) Wir betrachten die Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{Q})$ definiert als

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie, dass $\{0\}$ und $\mathbb{Q}^n$ die einzigen A-invarianten Untervektorräume in $\mathbb{Q}^n$ sind.