D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2020
Prof. Thomas Willwacher

Serie 2

Jordansche Normalform

Bemerkung: Die Studierenden sind gebeten, sich den Satz über die Jordansche Normalform (Fischer 4.6.7), der wegen des Vorlesungsausfalls am Freitag nicht behandelt werden konnte, schonmal selbstständig im Fischer anzuschauen.

1. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform über $\mathbb{C}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sei B eine komplexe 5×5-Matrix mit charakteristischem Polynom $-(t-3)^2(t+5)^3$ und Minimalpolynom $(t-3)(t+5)^2$.

   Bestimmen Sie die möglichen Jordanschen Normalformen von B.

3. Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix S, so dass $A = S(D+N)S^{-1}$, wobei D Diagonalmatrix, N nilpotent und $DN = ND$ ist. Berechnen Sie anschließend A^{20} (ohne Hilfe eines Computers).

4. Für eine reelle Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ definiert man

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k .$$

   Bemerkung: Es lässt sich zeigen, dass $\exp(A)$ *wohldefiniert ist, d.h. dass der Limes tatsächlich existiert. Sie dürfen dies in den folgenden Teilaufgaben voraussetzen.*

   (a) Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ invertierbar. Zeigen Sie:

$$\exp(SAS^{-1}) = S \exp(A) S^{-1} .$$

(b) Sei nun $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie $\exp(A)$.

Bemerkung: Für kommutierende Matrizen A und B lässt sich außerdem zeigen, dass $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$*.*

5. Sei F ein Endomorphismus eines endlich dimensionalen K-Vektorraums V, dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Für jeden Eigenwert λ von F sei d_λ die maximale Größe eines Jordanblocks zu λ. Zeigen Sie, dass für das Minimalpolynom von F gilt:

$$M_F(t) = \prod_{\lambda} (t - \lambda)^{d_\lambda} .$$