Serie 3

KANONISCHES SKALARPRODUKT, VEKTORPRODUKT

1. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform von
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_3$.

2. Die Spur einer Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ ist definiert als
$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,.$$
   (a) Seien $A, B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass gilt
   $$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)\,.$$
   (b) Sei $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ invertierbar. Folgern Sie, dass
   $$\mathrm{tr}(SAS^{-1}) = \mathrm{tr}(A)\,.$$
   (c) Sei nun A, so dass $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass A nilpotent ist.
   Hinweis: Verwenden Sie die Jordansche Normalform von A.

3. Zeigen Sie folgende Eigenschaften des kanonischen Skalarproduktes auf $\mathbb{R}^n$. Verwenden Sie hierfür lediglich die Eigenschaften 1.-3., Fischer 5.1.1.
   (a) $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$,
   (b) $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\| \cdot \|y\| \cos\theta$,
   (c) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y \rangle$,
   (d) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

4. Das *Kreuzprodukt* oder *Vektorprodukt* ist die Abbildung $\times \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert als
$$x \times y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)\,,$$
wobei $x = (x_1, x_2, x_3)$ und $y = (y_1, y_2, y_3)$. Zeigen Sie für alle x, y, z:
   (a) Das Vektorprodukt ist linear in beiden Argumenten,

(b) das Vektorprodukt ist antisymmetrisch: es gilt $x \times y = -y \times x$; insbesondere $x \times x = 0$,

(c) $\langle x, y \times z\rangle = \det(x\, y\, z)$,

(d) $x \times (y \times z) = \langle x, z\rangle y - \langle x, y\rangle z$,

(e) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot |\sin\theta|$, mit θ dem Winkel zwischen x und y.

5. Sei A eine reelle $n \times n$-Matrix.

   (a) Kommutiert A im Allgemeinen mit seiner transponierten Matrix A^T?

   (b) Wir nehmen an, die Spalten $v_1, \dots, v_n$ von A bilden eine orthonormale Menge bzgl. des kanonischen Skalarproduktes, d.h. $\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}$. Bilden die Zeilen von A ebenfalls eine orthonormale Menge?

   (c) Sei nun $u_1, \dots, u_n$ eine orthonormale Menge im $\mathbb{R}^n$ und sei $v \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Weiter sei θ_i der Winkel zwischen v und u_i. Zeigen Sie:

$$\cos^2\theta_1 + \dots + \cos^2\theta_n = 1\,.$$