Serie 4

Bilinear- und Sesquilinearformen

1. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$ und $W, W' \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Das orthogonale Komplement $W^\perp \subset V$ ist ein Untervektorraum.

   (b) Es gilt:
   $$(W^\perp)^\perp = W\,.$$
   Achtung: In unendlich dimensionalen Vektorräumen gilt dies im Allgemeinen nicht.

   (c) Es gilt:
   $$(W + W')^\perp = W^\perp \cap (W')^\perp\,, \quad (W \cap W')^\perp = W^\perp + (W')^\perp\,.$$

2. Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist durch
   $$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + ax_1y_2 + ax_2y_1 + 7x_2y_2$$
   ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert?

3. Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ und Sesquilinearform s. Wir nehmen an, die Matrix von s bzgl. $\mathcal{B}$ ist
   $$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & i & 1 \end{pmatrix}\,.$$

   (a) Sei $\mathcal{C} = (v_1 + iv_2, v_2 + v_3, -v_1 + v_2 + v_3)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{C}$ eine Basis von V ist und berechnen Sie die Basiswechselmatrizen $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}$ und $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

   (b) Bestimmen Sie die Matrix von s bzgl. $\mathcal{C}$.

4. Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}[t]$ aller Polynome über $\mathbb{R}$ und den Untervektorraum V aufgespannt durch $1, t, t^2, t^3$. Zeigen Sie:

   (a) Für Polynome $f, g \in \mathbb{R}[t]$ ist durch
   $$s(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t)dt$$
   ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[t]$ definiert.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der Einschränkung von s auf V bzgl. der Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

(c) Bestimmen Sie eine ONB von V durch Anwenden des Gram-Schmidt Verfahrens auf die Basis $(1, t, t^2, t^3)$.

(d) *Seien $p_0, p_1, p_2, \ldots$ die durch Anwenden des Gram–Schmidt Verfahrens auf die Basis $(1, t, t^2, \ldots)$ von $\mathbb{R}[t]$ gewonnenen Polynome. Zeigen Sie, dass

$$p_n = c_n \frac{d^n}{dt^n}(t^2 - 1)^n \,,$$

mit Konstanten $0 \neq c_n \in \mathbb{R}$ (Rodrigues Formel).

Bemerkung: Bis auf die Konstanten sind die so gewonnenen Polynome die Legendre Polynome, die in der MMP I Vorlesung noch eine wichtige Rolle spielen werden.

5. Benutzen Sie die Cauchy–Schwarz Ungleichung um zu zeigen, dass für positive reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ gilt:

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{b_1 + \ldots + b_n} \,.$$