Serie 5

Orthogonale und unitäre Endomorphismen

1. Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\, , \,\rangle$ und $W \subset V$ ein Untervektorraum. Weiter sei $(w_1, \ldots, w_m)$ eine ONB von W. Definiere den *orthogonalen Projektor* $P\colon V \to V$ auf W durch

$$Pv = \langle v, w_1\rangle w_1 + \cdots + \langle v, w_m\rangle w_m\,.$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften für alle $u, v \in V$:

(i) $P^2 = P$,

(ii) $\mathrm{Im}(P) = W$,

(iii) $\langle u, Pv\rangle = \langle Pu, v\rangle$,

(iv) für $v \in V$ ist $Pv \in W$ und $v - Pv \in W^\perp$,

(v) Pv ist der Punkt in W, der kleinsten Abstand zu v hat.

2. Ein Unterraum U von $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt sei aufgespannt von den beiden Vektoren $v_1 = (1, 1, 1)^T$ und $v_2 = (0, 2, 1)^T$.

(a) Bestimmen Sie je eine Orthonormalbasis von U und von $U^\perp$.

(b) Geben Sie die Darstellungsmatrizen der Orthogonalprojektionen

$$\mathbb{R}^3 \to U \quad \text{und} \quad \mathbb{R}^3 \to U^\perp$$

an bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und der jeweiligen Basis aus (a).

3. Ist V ein euklidischer Vektorraum und F ein Endomorphismus von V, so heißt F *winkeltreu*, falls F injektiv ist und

$$\measuredangle(v, w) = \measuredangle(F(v), F(w))\,.$$

Hierbei ist der Winkel $\theta = \measuredangle(v, w)$ definiert durch $\cos(\theta) = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$.
Zeigen Sie: F ist winkeltreu, genau dann wenn F von der Form λG mit $\lambda \neq 0$ und G orthogonal ist.

4. Sei $n \geqslant 1$ und sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Zeigen Sie, dass die komplexe Matrix

$$A = \Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\,\zeta^{(k-1)(\ell-1)}\Big)_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n}$$

unitär ist.

5. Sei F ein Endomorphismus des euklidischen oder unitären Vektorraums V und $W \subset V$ ein F-invarianter Untervektorraum, also $F(W) \subset W$. Wir betrachten hier zunächst nur endlich dimensionale V.

   (a) Sei F selbstadjungiert. Zeigen Sie, dass dann $W^\perp$ wieder F-invariant ist.

   (b) Sei von nun an F orthogonal bzw. unitär. Zeigen Sie, dass $W^\perp$ nun F^{-1}-invariant ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $F|_W$ bijektiv ist, W auch F^{-1}-invariant ist und $W^\perp$ auch F-invariant ist.

   (d) *Betrachten Sie nun den unendlich dimensionalen Raum der komplexen Folgen $a = (\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots)$ mit nur endlich vielen Gliedern $\neq 0$ und Skalarprodukt $\langle a, b\rangle = \sum_j a_j \bar{b}_j$. Sei F die Verschiebung um eine Stelle, also $F(a)_n = a_{n-1}$ und W der Untervektorraum der Folgen, so dass $a_j = 0$ für alle $j < 0$. Zeigen Sie, dass $\langle Fa, Fb\rangle = \langle a, b\rangle$, dass F invertierbar ist, und dass $F(W) \subset W$, also W F-invariant ist. Zeigen Sie, dass dennoch $F|_W$ nicht bijektiv ist und W nicht F^{-1}-invariant ist und $W^\perp$ nicht F-invariant ist.