Serie 6

Hauptachsentransformation, positive Definitheit

1. Gegeben sei die hermitesche Matrix $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{C})$ definiert als
$$A = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -i & 2 & 0 \\ i & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine unitäre Matrix $P \in U(3)$, so dass $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.

2. Sei $A \in \mathrm{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$ symmetrisch positiv definit und
$$E = \{x^T A x = 1\} \subset \mathbb{R}^3 .$$
Berechnen Sie die kritischen Punkte von $f(x) = \|x\|^2$ auf E. Verwenden Sie hierzu Methoden der Analysis II. Zeigen Sie, dass $f(x)$ auf E beschränkt ist, und die kritischen Werte gerade $\frac{1}{\lambda_j}$ sind, mit λ_j den Eigenwerten von A.
Bemerkung: E ist ein Ellipsoid und $\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$ sind gerade die Längen der Halbachsen.

3. Betrachten Sie die reelle symmetrische Matrix
$$G = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$
Führen Sie für G eine Hauptachsentransformation durch, d.h. finden Sie eine orthogonale Matrix S, so dass $S^T G S$ eine Diagonalmatrix ist.

   Hinweis: Alle Eigenwerte von G sind ganzzahlig.

4. Sei A eine reelle symmetrische Matrix mit $A^k = I$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann sogar $A^2 = I$ gilt.

5. Zeigen Sie, dass für eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$ folgende Eigenschaften äquivalent sind:
   (i) A ist positiv semi-definit, d.h. für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $x^T A x \geqslant 0$.
   (ii) $A = U^T U$ für eine Matrix $U \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{R})$.
   (iii) Alle Eigenwerte von A sind nicht-negativ.

(iv) Alle Hauptminoren von A sind nicht-negativ.

Achtung: Hierbei ist ein Hauptminor die Determinante einer $k \times k$ Teilmatrix von A, die symmetrisch zur Diagonalen von A ist. Im Kriterium zur positiven Definitheit (Fischer 5.7.7) benötigt man nur die führenden Hauptminoren zu betrachten.