D-MATH
Prof. Thomas Willwacher

Lineare Algebra II

FS 2020

Serie 7

Dualraum

1. Betrachten Sie die Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3i \\ 3 & 8 & -8i \\ 3i & 8i & 7 \end{pmatrix}.$$
Finden Sie $S_1 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und $S_2 \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$, so dass $S_1^T A S_1$ und $S_2^T B \bar{S}_2$ diagonal sind.
Hinweis: Sie müssen hier keine Eigenwerte berechnen; verwenden Sie elementare Zeilen- und Spaltenumformungen.

2. Sei V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $s\colon V \times V \to K$ eine alternierende Bilinearform, d.h. $s(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Zeigen Sie, dass eine Basis $\mathcal{B}$ von V existiert, so dass
$$M_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & \\ & & & -1 & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$
Die alternierende Bilinearform s ist also durch nur eine Zahl, den Rang, charakterisiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor.
   (a) Zeigen Sie, dass entweder $s = 0$ oder zwei linear unabhängige Vektoren u, v existieren mit $s(u, v) = 1$.
   (b) Zeigen Sie die gewünschte Aussage mit Induktion über $n = \dim V$. Betrachten Sie dazu den Untervektorraum
   $$W = \{w \in V \mid s(u, w) = s(v, w) = 0\}$$
   und zeigen Sie insbesondere, dass $V = \mathrm{span}(u, v) \oplus W$.

Bemerkung: Eine alternierende Bilinearform ist auch schiefsymmetrisch, denn

$$0 = s(v+w, v+w) = s(v,v)+s(v,w)+s(w,v)+s(w,w) = 0+s(v,w)+s(w,v)+0\,.$$

Falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$ *ist alternierend äquivalent zu schiefsymmetrisch.*

3. Sei V ein Vektorraum und $W_1, W_2 \subset V$ Untervektorräume. Zeigen Sie:
   (a) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$,
   (b) $W_1^0 + W_2^0 \subset (W_1 \cap W_2)^0$,
   (c) falls V endlich dimensional ist, dann ist $W_1^0 + W_2^0 = (W_1 \cap W_2)^0$.

   Bemerkung: Für V unendlich dimensional gilt in (b) i.A. keine Gleichheit.

4. Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$ der Vektorraum der reellen Polynome von Grad $\leqslant 2$. Für $p \in V$ definieren wir

$$f_1(p) = \int_0^1 p(t)dt\,, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(t)dt\,, \quad f_3(p) = \int_0^{-1} p(t)dt\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 linear sind, also Elemente des Dualraums V^* definieren.
   (b) Zeigen Sie, dass f_1, f_2, f_3 eine Basis von V^* bilden.

5. Betrachten Sie den Untervektorraum $W \subset \mathbb{R}^4$ aufgespannt durch

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie eine Matrix A mit $\mathrm{Ker}(A) = W$.