Serie 8

Adjungierte Abbildung

1. Berechnen Sie jeweils die adjungierte Abbildung F^{ad} zu F:

   (a) Sei $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 10}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 10$ mit Skalarprodukt
   $$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$
   und sei
   $$F(p) = \frac{d}{dt}((1-t^2)p')\,.$$
   Zusatz: Was schließen Sie für die Eigenvektoren und Eigenwerte von F? Sie können auch zeigen, dass die Eigenvektoren von F gerade die Legendre Polynome der Serie 4 sind.

   (b) $F = \frac{d}{dt}$ mit $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 2}$, mit dem Skalarprodukt von (a).

   (c) Sei wieder $V = \mathbb{R}[t]_{\leqslant 10}$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leqslant 10$, aber jetzt mit Skalarprodukt
   $$\langle f, g\rangle = \int_{0}^{\infty} f(t)g(t)e^{-t}dt$$
   und sei $F \in \mathrm{End}(V)$, so dass
   $$F(p) = tp'' + (1-t)p'\,.$$

   (d) * Wir betrachten nun ein unendlich dimensionales Beispiel, auch wenn dies in der Vorlesung streng genommen nicht behandelt wurde. Seien nun V die polynomialen Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und W die polynomialen Funktionen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Sei das Skalarprodukt auf V und W jeweils gegeben durch
   $$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)^T g(x) e^{-\frac{1}{2}\|x\|^2} d^3x\,.$$
   Sei $F = \nabla \in \mathrm{Hom}(V, W)$ der Gradient, also $F(p) = grad(p) = \nabla p$. Zeige, dass die Abbildung $F^{\mathrm{ad}}\colon W \to V$ definiert durch $F^{\mathrm{ad}}(q)(x) = -div(q)(x) + x^T q(x)$ für alle $p \in V$, $q \in W$, $x \in \mathbb{R}^3$ erfüllt:
   $$\langle F(p), q\rangle_W = \langle p, F^{\mathrm{ad}}(q)\rangle_V\,.$$

(e) Sei nun $V = \mathbb{C}^n$ mit Skalarprodukt gegeben durch eine hermitesche positiv definite Matrix A (also $\langle x, y\rangle = x^T A\bar{y}$) und $F \in \mathrm{End}(V)$ gegeben durch eine beliebige Matrix $B \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$.

Bemerkung: Für (b) kann es sinnvoll sein, zuerst (e) zu lösen. Für (a), (c) ist die Einschränkung des Grades der Polynome eigentlich unerheblich, Sie können auch mit dem unendlich dimensionalen Vektorraum aller Polynome arbeiten, oder mit ausreichend differenzierbaren Funktionen. Für (b) können Sie allgemeiner auch alle Polynome vom Grad $\leqslant N$ nehmen, die Aufgabe wird dann allerdings schwieriger.

2. Sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum und $W \subset \mathrm{End}(V)$ ein Untervektorraum mit den Eigenschaften

   (i) $F \in W \implies F^{\mathrm{ad}} \in W$, d.h. W ist $(-)^{\mathrm{ad}}$-invariant,

   (ii) $F, G \in W \implies FG = GF$.

   Zeigen Sie: Dann gibt es eine ONB $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V und lineare Funktionen $\lambda_j \colon W \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, so dass für alle $F \in W$ und j gilt
   $$F(v_j) = \lambda_j(F)v_j\,.$$
   Das heißt also, die Basis besteht aus gemeinsamen Eigenvektoren der Endomorphismen in W.

3. Seien V, W endlich dimensionale euklidische Vektorräume.

   (a) Sei weiter $F \colon V \to W$ linear und $U \subset W$ ein Untervektorraum. Dann gilt
   $$F^{\mathrm{ad}}(U^\perp) = (F^{-1}U)^\perp\,.$$

   (b) Sei nun $F \colon V \to V$ selbstadjungiert. Dann gilt für alle Untervektorräume $U \subset V$
   $$F(U^\perp) = (F^{-1}U)^\perp\,.$$
   Gilt die Umkehrung?

4. Betrachten Sie zwei windschiefe Geraden $L = v + w\mathbb{R}$ und $L' = v' + w'\mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^n$ Sei weiterhin
   $$d(L, L') = \min(\|u' - u\| \mid u \in L, u' \in L')$$
   der Abstand zwischen L und L'. Bestimmen Sie $d(L, L')$ unter Verwendung der Differentialrechnung.

5. Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum, $F \in \mathrm{End}(V)$ und $F^* \in \mathrm{End}(V^*)$ die duale Abbildung. Zeigen Sie, dass für charakteristisches Polynom und Minimalpolynom gilt:
   $$p_F(t) = p_{F^*}(t)\,, \qquad m_F(t) = m_{F^*}(t)\,.$$