Serie 9

Tensorprodukt

1. Für K-Vektorräume V, V', W, W' sowie Homomorphismen $F\colon V \to V'$ und $G\colon W \to W'$ definieren wir das Tensorprodukt von F und G durch:

$$F \otimes G\colon V \otimes W \to V' \otimes W' \,, v \otimes w \mapsto F(v) \otimes G(w) \,.$$

Zeigen Sie:

(a) Hierdurch ist eine K-lineare Abbildung definiert

$$\mathrm{Hom}_K(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_K(W, W') \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W').$$

(b) Für endlich-dimensionale Vektorräume ist die Abbildung ein Isomorphismus.

2. Seien U, V, W, Z endlich dimensionale K-Vektorräume, $A \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $B \in \mathrm{Hom}(W, Z)$ und betrachten Sie die lineare Abbildung[1]

$$\Psi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(U, Z) \,, F \mapsto B \circ F \circ A \,.$$

Zeigen Sie, dass unter der Identifikation $\mathrm{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$ aus der Vorlesung Ψ identifiziert werden kann mit dem Homomorphismus

$$\Phi\colon V^* \otimes W \to U^* \otimes Z \,, \quad \Phi = A^* \otimes B \,,$$

wobei A^* die zu A duale Abbildung ist.

3. Sei V ein K-Vektorraum. Konstruieren Sie einen K-Vektorraum $V \vee V$, das *symmetrische Produkt*, zusammen mit einer K-linearen Abbildung $\vee$

$$\vee\colon V \times V \to V \vee V \,,$$

die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: zu jedem K-Vektorraum W zusammen mit einer symmetrischen Abbildung $\xi\colon V \times V \to W$ gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee$, so dass $\xi = \xi_\vee \circ \vee$. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist durch $v_i \vee v_j$ für $i \leqslant j$ eine Basis von $V \vee V$ gegeben. Insbesondere ist

$$\dim V \vee V = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2} \,.$$

[1] Wir verzichten bei “Hom” von nun an häufig auf den Tiefsatz “K”.

4. Sei V ein K-Vektorraum und $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Wir betrachten

$$U = \mathrm{span}\{v \otimes w - w \otimes v \mid v, w \in V\} \subset V \otimes V\,,$$
$$U' = \mathrm{span}\{v \otimes v \mid v \in V\} \subset V \otimes V\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass die Komposition $U \to V \otimes V \to V \wedge V$ ein Isomorphismus ist.

   (b) Zeigen Sie, dass die Komposition $U' \to V \otimes V \to V \vee V$ ein Isomorphismus ist.

   (c) Zeigen Sie, dass im Fall $\mathrm{char}(K) = 2$ keine der Aussagen (a) und (b) gilt. *Hinweis: Betrachten Sie z.B.* $V = \mathbb{F}_2^2$ *und berechnen Sie* $U, U', V \wedge V, V \vee V$ *und obige Abbildungen explizit.*

5. Seien U, V, W Vektorräume.

   (a) Zeigen Sie, dass $U \otimes V \cong V \otimes U$ unter Verwendung der universellen Eigenschaft.

   (b) Zeigen Sie, dass ein Vektorraum $U \otimes V \otimes W$ zusammen mit einer 3-linearen Abbildung

   $$\eta\colon U \times V \times W \to U \otimes V \otimes W$$

   existiert, mit folgender universellen Eigenschaft:
   Für jeden Vektorraum Z mit 3-linearer Abbildung $\xi\colon U \times V \times W \to W$ existiert eine eindeutige lineare Abbildung $\xi_\otimes\colon U \otimes V \otimes W \to Z$, mit $\xi = \xi_\otimes \circ \eta$.
   Zeigen Sie weiter, dass $U \otimes V \otimes W$ hierdurch eindeutig, bis auf eindeutigen Isomorphismus definiert ist.

   (c) Zeigen Sie, dass $(U \otimes V) \otimes W \cong U \otimes (V \otimes W)$ indem Sie die universelle Eigenschaft aus (b) benützen.