D-MATH | Lineare Algebra II | FS 2020
Prof. Thomas Willwacher

Serie 10

Multilineare Algebra

1. Seien α, β, γ Vektoren in einem K-Vektorraum. Vereinfachen Sie die Ausdrücke
   (a) $(\alpha - \beta) \wedge (\alpha + \beta)$,
   (b) $(\alpha - \beta) \wedge (\beta - \gamma) \wedge (\gamma - \alpha)$,
   (c) $(\beta - \alpha) \wedge (\gamma - \alpha) + (\alpha + \gamma) \wedge \gamma - \beta \wedge \gamma$.

2. Sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_4 \in V$. Zeigen Sie: Es existieren Vektoren $w_1, w_2 \in V$ mit
$$v_1 \wedge v_2 + v_3 \wedge v_4 = w_1 \wedge w_2\,,$$
genau dann wenn $v_1, \ldots, v_4$ linear abhängig sind.

3. Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung von Serie 9, Aufg. 3: Sei V ein K-Vektorraum und $k \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Konstruieren Sie einen K-Vektorraum $\bigvee^k V$, das *k-fache symmetrische Produkt*, zusammen mit einer K-linearen Abbildung $\vee$
$$\vee\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to \bigvee\nolimits^k V\,,$$
die folgende universelle Eigenschaft erfüllen: zu jedem K-Vektorraum W zusammen mit einer symmetrischen multilinearen Abbildung
$$\xi\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to W$$
gibt es genau eine lineare Abbildung $\xi_\vee$, so dass $\xi = \xi_\vee \circ \vee$. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so ist durch $v_{i_1} \vee \cdots \vee v_{i_k}$ für $i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k$ eine Basis von $\bigvee^k V$ gegeben. Insbesondere ist
$$\dim \bigvee\nolimits^k V = \binom{n+k-1}{k}.$$

4. Sei V endlich dimensionaler K-Vektorraum, $k, \ell \geqslant 1$ und
$$\alpha = \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \Lambda^k V\,, \quad \beta = \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_\ell \in \Lambda^\ell V\,.$$
   (a) Zeigen Sie, dass eine bilineare Abbildung
$$\mu\colon \Lambda^k V \times \Lambda^\ell V \to \Lambda^{k+\ell} V$$
   mit
$$(\alpha, \beta) \mapsto \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \wedge \beta_1 \wedge \cdots \wedge \beta_\ell$$
   existiert. Das Element $\alpha \wedge \beta = \mu(\alpha, \beta)$ heißt äußeres Produkt von α und β.

(b) Es gilt
$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{k\ell} \beta \wedge \alpha\,.$$

5. Beweisen Sie die Polarisationsformel für symmetrische multilineare Abbildungen: Sei $k \geqslant 1$ eine natürliche Zahl, K ein Körper mit $\mathrm{char} K > k$ und seien V und W Vektorräume über K. Weiter sei
$$s\colon \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k-mal} \to W$$
eine symmetrische multilineare Abbildung. Wir definieren die Abbildung
$$q\colon V \to W\,, \qquad q(v) = s(v, \ldots, v)\,.$$
Zeigen Sie, dass man s aus q wieder gewinnen kann. Für $v_1, \ldots, v_k \in V$ und eine nicht-leere Teilmenge $S \subset \{1, \ldots, k\}$ setze $v_S = \sum_{j \in S} v_j$. Dann gilt
$$s(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\substack{S \subset \{1,\ldots,k\} \\ S \neq \varnothing}} (-1)^{k-|S|} q(v_S)\,, \tag{1}$$
$$s(v_1, \ldots, v_k) = \frac{1}{(2^k k!)} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k \in \{\pm 1\}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_k \cdot q(\varepsilon_1 v_1 + \cdots + \varepsilon_k v_k)\,. \tag{2}$$