Serie 11

Äusseres Produkt, Singulärwertzerlegung

1. Seien $F\colon V \to W$ und $G\colon W \to U$ lineare Abbildungen von endlichdimensionalen K-Vektorräumen und $r \geqslant 0$. Zeigen Sie:

   (a) Die Zuordnung
   $$\Lambda^r F\colon \Lambda^r V \to \Lambda^r W\,, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \mapsto F(v_1) \wedge \cdots \wedge F(v_r)$$
   definiert eine lineare Abbildung.

   (b) Es gilt die Funktorialität $\Lambda^r(G \circ F) = \Lambda^r G \circ \Lambda^r F$.

   (c) F ist injektiv genau dann, wenn $\Lambda^r F$ ungleich Null ist für $r = \dim(V)$.

   (d) F ist surjektiv genau dann, wenn $\Lambda^r F$ ungleich Null ist für $r = \dim(W)$.

2. Ein Element $\alpha \in \Lambda^k V$ heißt *rein*, falls Vektoren $w_1, \ldots, w_k \in V$ existieren mit $\alpha = w_1 \wedge \ldots \wedge w_k$. Zeigen Sie:

   (a) Für jedes $\alpha \in \Lambda^2 V$ existiert eine Basis $\{b_i\}_{i \in I}$ von V und ein $k \geqslant 0$ mit $\{1, \ldots, 2k\} \subset I$ und $\alpha = b_1 \wedge b_2 + \ldots + b_{2k-1} \wedge b_{2k}$.

   (b) Ist $2 \neq 0$ in K, so ist $\alpha \in \Lambda^2 V$ genau dann rein, wenn $\alpha \wedge \alpha = 0$ ist in $\Lambda^4 V$.

3. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon \in \{0, 1\}$ durch die Zuordnung
   $$\begin{aligned} \rho\colon S_n &\to \operatorname{End}(\textstyle\bigotimes^n V)\,, \\ \sigma &\mapsto \left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto \operatorname{sign}(\sigma)^\varepsilon v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}\right) \end{aligned}$$
   eine Darstellung von S_n auf dem Vektorraum $\bigotimes^n V$ definiert wird.

4. Bestimmen Sie die Singulärwertzerlegung $A = UDV^\dagger$ der komplexen Matrix
   $$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3+2i & i & 0 \\ -i & 3+2i & 0 \\ 0 & 0 & 2i \end{pmatrix},$$
   wobei $(\ )^\dagger = \overline{(\ )}^T$.

5. Sei $A \in \mathrm{M}(n \times n, \mathbb{C})$ und $A = UDV^\dagger$ die Singulärwertzerlegung. Zeigen Sie, dass $UV^\dagger \in U(n)$ die in der Frobeniusnorm optimale Approximation von A durch eine unitäre Matrix ist, also für alle $X \in U(n)$ gilt:
   $$\|X - A\|_F \geqslant \|UV^\dagger - A\|_F\,.$$