# Serie 12

## Jordansche Normalform

1. Gegeben seien Punkte $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^3$, mit $n \geqslant 6$. Finden Sie die euklidische Transformation, also ein $c \in \mathbb{R}^3$ und $R \in O(3)$, die den Fehler

$$E(R, c) = \sum_{j=1}^{n} \|v_j - (Rw_j + c)\|^2$$

minimiert.

*Bemerkung: Dies ist ein häufiges Problem in der Praxis: Sie möchten messen, wie ein bekanntes Objekt im Raum orientiert ist. Dabei sind hier die $w_j$ Punkte in einem perfekten (Computer-)Modell Ihres Objektes, und die $v_j$ sind die real gemessenen Positionen der entsprechenden Punkte im Raum. (Oft hat man tatsächlich natürlich weniger Informationen als die Position der $v_j$, z.B. nur ein 2D Bild. Wer weitergehende Dinge lernen möchte kann nach "pose estimation" suchen.)*

*Hinweis: Verschieben Sie zunächst Ihre Punkte so, dass der Schwerpunkt im Ursprung liegt, also*

$$\sum_j v_j = 0 = \sum_j w_j \,.$$

*Das macht die Rechnung einfacher. (... und schauen Sie Satz 2.8 im Zusatzskript an.)*

2. Bestimmen Sie die Haupträume (=verallgemeinerte Eigenräume) folgender reeller Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -6 & -6 \\ -7 & -7 & -2 \\ 22 & 16 & 11 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & 2 \\ -7 & 3 & -3 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Bemerkung: Zerfällt das charakteristische Polynom des Endomorphismus $F$ in irreduzible (lineare oder quadratische) Faktoren*

$$P_F = \pm p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$$

*so ist der zum Faktor $p_j$ gehörende Hauptraum gerade $Ker(p_j(F)^{r_j})$.*

3. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform über $\mathbb{R}$ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & \frac{1}{2} & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie anschließend $\exp(\pi A)$.

4. Sei $A$ eine invertierbare Matrix mit Einträgen in einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Dann sind äquivalent:

   (i) $A$ ist ähnlich zu $A^{-1}$,

   (ii) für alle Eigenwerte $\lambda$ von $A$ und für alle $k$ sind die Anzahlen der Jordanblöcke der Größe $k$ zum EW $\lambda$ und zum EW $\frac{1}{\lambda}$ gleich.

*5. Sei $F$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen $K$-Vektorraums $V$, wobei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) Das Minimalpolynom von $F$ ist gleich dem charakteristischen Polynom von $F$.

   (b) Es existiert eine geordnete Basis $B$ von $V$, so dass $M_B(f)$ die Begleitmatrix eines Polynoms ist.

   *Bemerkung: Die Implikation (b)$\Rightarrow$(a) wurde schon in der Vorlesung gezeigt und muss hier nicht mehr neu bewiesen werden.*