 Lineare Algebra II FS 2020

Serie 13

Euklidischer Algorithmus, Jordan Blöcke

1. *(Euklidischer Algorithmus)* Seien $0 \neq f, g \in K[t]$ Polynome. Der Euklidische Algorithmus ist beschrieben durch folgende Rekursion.

   (i) Setze $r_0 = f$ und $r_1 = Rest(g, f)$, wobei $Rest(g, f)$ der bei der Polynomdivision von g durch f auftretende Restterm ist, also $g = fh + Rest(g, f)$.

   (ii) Setze rekursiv
   $$r_{i+1} = Rest(r_{i-1}, r_i)\,, i = 1, 2, \ldots\,.$$

   (iii) Sei $k + 1$ der erste Index so dass $r_{k+1} = 0$ ist. Dann gilt
   $$\mathrm{ggT}(f, g) = c \cdot r_k\,,$$
   wobei $0 \neq c \in K$ so gewählt ist, dass die rechte Seite normiert ist.

   (a) Zeigen Sie die Korrektheit des Euklidischen Algorithmus, also dass tatsächlich $\mathrm{ggT}(f, g) = c \cdot r_k$.

   (b) Zeigen Sie, dass $a, b \in K[t]$ existieren, so dass
   $$\mathrm{ggT}(f, g) = af + bg\,.$$

   (c) Seien nun $f, g \in \mathbb{R}[t]$ folgende Polynome:
   $$f = t^5 - 7t^4 + 31t^3 - 133t^2 + 228t\,, \quad g = t^6 - 5t^5 + 22t^4 - 90t^3 + 53t^2 + 95t - 76\,.$$
   Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(f, g)$ mit dem Euklidischen Algorithmus.

2. Seien $0 \neq f, g, \in K[t]$ und $I_f = fK[t], I_g = gK[t]$ die von f und g erzeugten Ideale. Zeigen Sie, dass

   (a)
   $$\mathrm{ggT}(f, g) = M_{I_f + I_g} \text{ und } \mathrm{kgV}(f, g) = M_{I_f \cap I_g}\,,$$
   wobei M_I das Minimalpolynom des Ideals $I \subset K[t]$ bezeichnet.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(-, -)$ und $\mathrm{kgV}(-, -)$ kommutative und assoziative Operationen sind und dass gilt
   $$\mathrm{ggT}(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{ggT}(f_1, \mathrm{ggT}(f_2, \ldots \mathrm{ggT}(f_{n-1}, f_n) \ldots))\,,$$
   $$\mathrm{kgV}(f_1, \ldots, f_n) = \mathrm{kgV}(f_1, \mathrm{ggT}(f_2, \ldots \mathrm{kgV}(f_{n-1}, f_n) \ldots))\,.$$

3. Seien V ein endlich dimensionaler K-Vektorraum und $F \in \operatorname{End}(V)$. Sei $p \in K[t]$ ein Polynom das zum charakteristischen Polynom P_F teilerfremd ist. Dann ist $p(F)$ invertierbar.

4. Sei $p \in K[t]$ ein irreduzibles normiertes Polynom von Grad $n = \deg(p)$ mit Begleitmatrix $B_p \in \mathrm{M}(n \times n, K)$. Für $r \in \mathbb{N}$ sei

$$\tilde{J}_r(B_p) = \begin{pmatrix} B_p & \tilde{E}_n & & & \\ & B_p & \tilde{E}_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \tilde{E}_n \\ & & & & B_p \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(nr \times nr, K)\,.$$

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$M_{\tilde{J}_r(B_p)} = p^r$$
   das Minimalpolynom von $\tilde{J}_r(B_p)$ ist.
   Hinweis: Es gibt einen Vektor (zyklischer Vektor) $v \in K^{rn}$ so dass
   $$K^{rn} = \operatorname{span}\big(v, Av, \ldots, A^{rn-1}v\big)\,,$$
   wobei $A = \tilde{J}_r(B_p)$. Also bilden $v, Av, \ldots, A^{rn-1}v$ eine Basis des K^{rn}.

   (b) Zeigen Sie, dass für $0 \leqslant s \leqslant r$ die Matrix $p(\tilde{J}_r(B_p))^s$ Rang $(r-s)n$ hat.

   (c) Sei nun $F \in \operatorname{End}(V)$ und $\mathcal{B}$ eine Basis von V so dass $M_{\mathcal{B}}(F)$ in Jordanscher Normalform ist (im Sinne von Theorem 3.6 im Zusatzskript), wobei der Jordanblock $\tilde{J}_r(B_p)$ jeweils s_r mal vorkommt ($r = 1, 2, \ldots$). Berechnen Sie dann
   $$d_j = \dim \operatorname{Ker}(p(F)^j)\,, \quad j = 1, 2, \ldots\,,$$
   mittels Aufgabe 3 und (b). Rechnen Sie auch direkt nach, dass
   $$s_r = \frac{1}{n}\left(2d_r - d_{r-1} - d_{r+1}\right)\,,$$
   wobei $n = \deg(p)$.

5. In der Vorlesung wurden zwei a priori verschiedene Versionen der Jordanschen Normalform für $K = \mathbb{R}$ betrachtet. Bei der einen waren die Jordanblöcke von der Form $J_r(\lambda)$ oder

$$J_r(A) = \begin{pmatrix} A & E_2 & & & \\ & A & E_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & E_2 \\ & & & & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(2r \times 2r, \mathbb{R})\,,$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

Bei der anderen waren die Jordanblöcke von der Form

$$\tilde{J}_r(A) = \begin{pmatrix} A & \tilde{E}_n & & & \\ & A & \tilde{E}_n & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \tilde{E}_n \\ & & & & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(nr \times nr, K) ,$$

mit A der Begleitmatrix zu einem irreduziblen Faktor im charakteristischen Polynom des Endomorphismus F. Bestimmen Sie die Basistransformation, die die eine Jordansche Normalform in die andere überführt, für $r = 1$ und $r = 2$.