D-MATH | Lineare Algebra II | Sommer 2020

Prof. Thomas Willwacher

Korrekturschema

1. **Multiple Choice**

2. **Younghan+Alessandro**

   Part (a)

   – **(3A)** is assigned for computing the characteristic polynomial of A and eigenvalues of A. I gave pull points if one decomposed the characteristic polynomial correctly. **(2A)** is given if the characteristic polynomial is computed correctly but eigenvalues are not given correctly.. I gave full points even if students did not specify the multiplicity of eigenvalues. Every computation mistake costs -1 point.

   – **(3B)** is assigned for computing eigenspaces. There are some cases where students wrote two different basis and did not specify which basis they used. In this case I followed the basis used in **(2C)**. Computing each space worths one point. There can be a different choice of basis. For instance, $(1,-1,1),(1,0,1),(0,0,1)$ also works.

   – **(2C)** is assigned for computing the matrix S and S^{-1} correctly. In fact there is a 1 dimensional freedom to choose a matrix S. I gave full points if one computes one of S and S^{-1}. But confusing S and S^{-1} costs -1 point. Every computation mistake costs -1 point.

   – **(2D)** is assigned for computing the Jordan normal form J of A. Every computation mistake costs -1 point.

   Part (b)

   – **(3K)** is assigned for computing J^n correctly (e.g. if one can write $J^n = D^n + nN$ or compute J^n by hand). **(1K)** is given if one wrote the decomposition $J = D + N$ but could not pursue further computation. **(1K)** is given if J^n is computed for each n but there are computational mistakes. Every computation mistake costs -1 point.

   – **(2L)** is assigned for computing the sum correctly. I gave full points if someone wrote $\sum_{i=1}^{10}(-2)^i$, etc. Every computation mistake costs -1 point.

   When a student made critical mistakes so that the Jordan form became a diagonal matrix:

   – **(2A)** is assigned for computing the characteristic polynomial of A.

   – **(2E)** is assigned for computing the matrix S and S^{-1} correctly.

   – **(1F)** is assigned for writing J in terms of eigenvalues.

   – **(1G)** is assigned for computing the sum correctly.

3. **Miguel+Andreas**

1 - A1 Mentions (or makes clear they want to use) the Sylvester's criterion.

2 - A2 Computes correctly the 4 principal minors. One point is for the first 3 minors and another point for the last one(=determinant of A). If the determinant of A is incorrectly determined due to an error in the first 3 minors, 1-A2 is still awarded.

1 - A3 Answers accordingly to the computation of the minors. If one of the minors computed in A2 was non-real, this point is not awarded.

1 - B1 Mentions (or makes clear they want to use) the Gram-Schmidt process.

1 - B2 Computes v_1.[1]

1 - B3 Computes v_2.[1]

2 - B4 Computes v_3.[1]

2 - B5 Computes v_4.[1]

1 - C1 Rewrites the equation as $BA\bar{B}^t = A$.

1 - C2 Says B is unitary (with respect to the Hermitian metric $\langle\, ,\, \rangle_A$).

1 - C3 Says B is diagonalizable (by the spectral theorem).

1 - C4 Says that the eigenvalues of B have absolute value 1.

We also award points for steps in the following alternative solution to part a):

1 - A'1 Computes correctly the characteristic polynomial of A.

1 - A'2 Notes that the roots of the characteristic polynomial must be real since A is Hermitian.

2 - A'3 Excludes the possibility of real negative roots by observing that the coefficients of the polynomial are alternating.

4. **Nicolas+Xenia** Nicht zielführende und unverständliche Lösungsversuche geben keine Punkte. Bei schweren Verständnisfehlern (z.B. Verwenden einer falschen Formel zur Matrixmultiplikation oder für die Spur) können pro Fehler bis zu 2 Punkte abgezogen werden.

   (a) [4 Punkte]

   2 (A) Zwei Punkte für den Beweis der Sesquilinearität (Additivität + Skalarmultiplikation). Wenn nur Linearität im ersten Argument gezeigt wurde und gezeigt wurde, dass die Form hermitesch ist gibt es zwei Punkte. Falls nur auf die entsprechenden Eigenschaften der Spur verwiesen gibt es einen Punkt.

   1 (B) Einen Punkt für den Beweis, dass die Form hermitesch ist.

[1] If an error occurs at an early stage and the subsequent stages are correct up to that error, the points of the subsequent stages are awarded. If the student doesn't normalize during the process, at most 3 points are awarded to B2+B3+B4+B5 and each mistake discounts one point.

1 (C) Einen Punkt für den Beweis, dass die Form positiv definit ist.

-2 (D) Für die Verwendung von reellen Zahlen statt komplexen Zahlen, Weglassen der Betragsstriche, Weglassen der komplexen Konjugation können maximal zwei Punkte abgezogen werden (für jeden der obenstehenden Punkte max. einen Abzug bis zum Maximum von 2). Dieser Punkt wird nur abgezogen, wenn der entsprechende Punkt (A), (B) oder (C) gegeben wurde.

(b) [4 Punkte] Die Bepunktung folgt der Musterlösung. Für andere zielführende Beweisideen werden analog Punkt vergeben.

1 (E) 1 Punkt für das korrekte Anwenden der Konjugation und Transposition oder Ausmultiplizieren nach dem Einsetzen.

1 (F) 1 Punkt für die korrekte Verwendung der Invarianz der Spur unter zyklischen Permutationen.

1 (G) 1 Punkt für die korrekte Verwendung der Linearität der Spur. Diese Punkt wird auch gegeben, wenn er implizit korrekt in Verbindung mit (F) verwendet wurde.

1 (H) 1 Punkt für das korrekte Ausklammern oder Ausmultiplizieren und dem Erkennen von $\mathrm{ad}_{\bar{A}^T} X$.

-2 (I) Für eine schwer verständliche Darstellung eines korrekten Beweises oder Verwendung von falschen aber irrelevanten Aussagen können bis zu 2 Punkte abgezogen werden.

(c) [7 Punkte]

2 (J) 2 Punkte für das explizite Anwenden des Spektralsatzes (A (oder direkt ad_A) hat eine ONB aus Eigenvektoren und die λ_i sind reell).

2 (K) 2 Punkte für den Beweis, dass $v_i \bar{v}_j^T$ ein EV von ad_A zum EW $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_i - \bar{\lambda}_j$ ist.

2 (L) 2 Punkte für den Beweis, dass die $v_i \bar{v}_j^T$ eine Basis bilden.

1 (M) 1 Punkt für die Folgerung, dass das charakteristische Polynom die gewünschte Form hat. Punkt wird nicht gegeben, wenn nicht gesagt wurde, dass die $v_i \bar{v}_j^T$ eine Basis bilden und keine weitere Begründung für das charakteristische Polynom gegeben wurde.

-4 (N) Für eine schwer verständliche Darstellung eines korrekten Beweises oder Verwendung von falschen aber irrelevanten Aussagen können bis zu 4 Punkte abgezogen werden.

5. **Xenia+Giuliano**

a) Es sind 4 Vektoren zu bestimmen. **(3U)** werden für die richtige Bestimmung einer Basis von $U^\perp$ vergeben. Ist einer der beiden Vektoren inkorrekt wird nur **(1U)** vergeben. **(3V)** werden für die richtige Bestimmung einer Basis von $V^\perp$ vergeben. Ist einer der beiden Vektoren inkorrekt wird nur **(1V)** vergeben.

b) **(2B)** werden für die Bestimmung der Basisvektoren von $U \cap V$, $U \cap V^\perp$, $U^\perp \cap V$, und $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$ vergeben; für jeweils 2 richtige wird 1 Punkt vergeben.

Lösungsweg 1: Man erhält **(3A)**, wenn man nun bemerkt, dass man die gesuchte Abbildung erhält indem man den ersten und letzten Vektor festhält und die anderen beiden vertauscht, da alle Vektoren bereits orthogonal sind und die gleiche Länge haben (**(2A)**, falls ohne Begründung). Bestimmung der korrekten Matrix gibt **(4M)**. Es werden nur **(2M)** vergeben, falls die Vektoren nicht normalisiert sind.

Lösungsweg 2: Man erhält **(3A')**, wenn man nun bemerkt, dass man die gesuchte Abbildung erhält indem man den ersten und letzten Vektor festhält und die anderen beiden vertauscht, da alle Vektoren bereits orthogonal sind und die gleiche Länge haben (**(2A')**, falls ohne Begründung und **(1A')**, falls die Vektoren nicht orthogonal gewählt waren). Weitere **(1P')** werden für die darstellende Matrix dieser Abbildung in der obigen Basis vergeben. Bestimmung der Basiswechselmatrix und ihrer Inversen gibt **(2W')**. Bestimmung der korrekten Matrix durch Multiplikation der drei Matrizen gibt **(1M')**.

In jedem der Lösungswege wird pro Rechenfehler in einer Teilkategorie ein Punkt abgezogen (pro Teilkategorie höchstens 0 Punkte).

6. **Raphael S.+Andreas** (a)

- [Die Formel

$$\underbrace{(\mu S)^T(\mu S) = \mu^2 S^T S}_{\Longrightarrow \text{1 Punkt}} = \underbrace{\mu^2 E_n}_{\Longrightarrow \text{1 Punkt}} \quad] \quad \Longrightarrow \text{Punkte } 2\mathrm{A}_1$$

- [Die Formel

$$(\mu S)(\mu S)^T = \mu^2 S S^T = \mu^2 E_n] \quad \Longrightarrow \text{Punkt } 1\mathrm{A}_1$$

- [Die Formeln

$$\underbrace{\mu = \sqrt{\lambda} \text{ und } S = \mu^{-1} R \text{ mit einer genauen Beschreibung der Matrix } S}_{\Longrightarrow \text{1 Punkt}}$$

$$\text{und } \underbrace{R^T R \text{ ist positiv semidefinit, } \lambda = 0}_{\Longrightarrow \text{1 Punkt}}] \quad \Longrightarrow \text{Punkte } 2\mathrm{A}_2$$

(b)

- $\big[$Die Formel $||A-\mu S||_F^2 = \mathrm{tr}\left((UDV^T - \mu S)^T(UDV^T - \mu S)\right)$ mit einer korrekten Ausmultiplikation der Terme oder Ähnliches mit der Beobachtung $||U^TA||_F^2 = ||A||_F^2\big]$ $\Longrightarrow$ 1 Punkt
- $\big[$Die korrekte Herleitung des Terms $\mathrm{tr}(D^2)\big]$ $\Longrightarrow$ 1 Punkt
- $\big[$Die korrekte Herleitung des Terms $-2\mu\mathrm{tr}(DU^TSV)\big]$ $\Longrightarrow$ 1 Punkt
- $\big[$Die korrekte Herleitung des Terms $+n\mu^2$ (wenn einmal +, dann wird auch $-n\mu^2$ als korrekt gezählt)$\big]$ $\Longrightarrow$ 1 Punkt
- $\big[$Jede nachvollziehbare Herleitung$\big]$ $\Longrightarrow$ 1 Punkt
- $\big[$Pro Fehler$\big]$ $\Longrightarrow$ -1 Punkt

$\Longrightarrow$ Punkte 4B

(c)

- $\big[$Die Formel $f(\mu) = \mathrm{tr}(D^2) - 2\mu\mathrm{tr}(DU^TSV) + n\mu^2\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1C_1$
- $\big[$Die Idee das Minimum mit der Bedingung $f'(\mu) = 0$ zu suchen$\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1C_2$
- $\big[2n\mu - 2\mathrm{tr}(DU^TSV) = 0\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1C_3$
- $\big[$Korrekte algebraische Herleitungen$\big]$ $\Longrightarrow$ Punkte $1C_1$, $1C_2$ und $1C_3$

(d)

- $\big[g(S) := \mathrm{tr}(D^2) - \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(DU^TSV)\right)^2\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1D_1$
- $\big[$Die Idee (c) zu benutzen, um das Minimum auszurechnen und einen korrekten Ansatz dafür$\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1D_1$
- $\big[$Der Ausdruck $||A - \mu S||_F^2$ wird minimiert, genau dann wenn $\mathrm{tr}(DU^TSV)$ maximiert wird$\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1D_1$
- $\big[$Eine nützliche Anwendung des Hinweises oder eine klare Herleitung des Ausdrucks $S = UV^T\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1D_2$
- $\big[$Die Ungleichung $g(S) \geqslant \mathrm{tr}(D^2) - \frac{1}{n}\left(\mathrm{tr}(D)\right)^2\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1D_3$
- $\big[$Die Formel $\mathrm{tr}(D^2) - \frac{\mathrm{tr}(D)^2}{n}$ für das Minimum$\big]$ $\Longrightarrow$ Punkt $1D_3$
- $\big[$Der Schluss, dass

$$\left\|A - \frac{\mathrm{tr}(D)}{n}UV^T\right\|_F \leqslant \left\|A - \underbrace{\mu' S'}_{=R'}\right\|_F$$

oder die Begründung, dass

$$\left.\left\|A-\frac{\operatorname{tr}(D)}{n}UV^T\right\|_F \text{ minimal ist}\right] \Longrightarrow \text{Punkt } 1\mathrm{D}_4$$

- [Korrekte algebraische Herleitungen ohne Ungleichungen]
  $\Longrightarrow$ Punkte $1\mathrm{D}_1$, $1\mathrm{D}_2$, $1\mathrm{D}_3$ und $1\mathrm{D}_4$

Andere Lösungswege ergeben die entsprechende Anzahl Punkte. Folgefehler werden berücksichtigt.
Nicht jeder kleine Fehler wird gezählt. Vollständig korrekte Antworten ergeben immer die vollen Punktzahlen. Es sind maximal 15 Punkte möglich.