Korrekturschema

1. **Paula+Tim**
2. **Lisa+Emilio**

   (a) Total: **10 Punkte**. Es gibt zwei Mögliche Lösungswege.

   - Lösungsweg 1

   (1A) Betrachten das characteristische Polynom/Eigenvalues von A. Aussagen wie
   $$p_A(t) = \dots$$
   oder
   $$\text{Eigenwerte } \Rightarrow \det(A - tE_3)$$
   genügen, um den Punkt zu bekommen.

   (1B) Korrekte Entwicklung der Determinante $\det(A - tE_3)$.

   (2C) Korrekte Faktorisierung des characteristischen Polynom $p_A(t)$.

   (1D) Der Eigenwert $t = 3$ hat Multiplizität 1. (Man muss nicht *welche* Multiplizität spezifizieren.)
   Man bekommt den Punkt auch wenn das korrekte *minimal* Polynom ergibt.

   Es werden **3 Punkte** verteilt, um den Jordan Block für $t = 2$ zu finden. Es gibt die folgende drei Möglichkeiten:

   i. Möglichkeit 1.

   (2E) Berechnung der Multiplizität von $t = 2$ im minimalen Polynom von A (sie ist 2). Falls keine Begründung nur **(1E)**.

   (1F) Sagen, dass die Multiplizität von $t = 2$ im minimalen Polynom genau die Grösse des grössten Jordan Blocks für den Eigenvalue $t = 2$ ist.
   Um den Punkt zu bekommen muss man explizit sagen, dass die Grösse des Jordan Blocks gleich 2 ist.

   ii. Möglichkeit 2.

   (2E') Berechnung von $\mathrm{Dim}(\ker(A - 2E_3))$ = geometrische Multiplizität von $t = 2$ (sie ist 1). Falls keine Begründung oder falls man einen falschen Basisvektor berechnet nur **(1E')**.

   (1F') Sagen, dass die geometrische Multiplizität von $t = 2$ genau die Anzahl von Jordan Blöcke für $t = 2$ in der Jordan Normal Form ist.
   Um den Punkt zu bekommen, muss man explizit sagen, dass die Anzahl von Jordan Blöcken gleich 1 ist *oder* explizit sagen, dass die Matrix nicht diagonalisierbar ist.

iii. Möglichkeit 3.

(1E") Berechnung der Dimension von $\ker(A - 2E_3)$ (sie ist 1).

(1F") Berechnung der Dimension von $\ker((A - 2E_3)^2)$ (sie ist 2).
Falls keine Begründung für (1E") oder (1F") wird insgesamt nur **1 Punkt** gegeben.

(1G") Sagen, dass die Anzahl von Jordan Blöcke der Grösse 2 für den Eigenvalue $t = 2$ ist

$$\dim \ker((A - 2E_3)^2) - \dim \ker(A - 2E_3).$$

(2H) Korrekte Jordan Normal Form $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

- Lösungsweg 2. **(1A)**,**(1B)** und **(2C)** werden wie im Lösungsweg 1 vergeben.

(1J) Finden Basis für Eigenraum zu $t = 3$, d.h. von $\ker(A - 3E_3) \rightsquigarrow \{v_1\}$.

(2K) Finden Basis für den Hauptraum zum Eigenwert $t = 2$, d.h. von $\ker(A - 2E_3)^2 \rightsquigarrow \{v_2, v_3\}$.

(2L) Die Jordan Normal Form ist $J = SAS^{-1}$ mit $S^{-1} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

Nur **(1L)** falls $J = SAS^{-1}$ mit $S = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$.

(1M) Korrekte Jordan Normal Form $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ & 2 & 0 \\ & & 3 \end{pmatrix}$.

(b) Total: **5 Punkte**.

(1P) : Umformung von N oder von $\exp(i\lambda A)$:

$$N = S^{-1} \exp(i\lambda J) S - E_3 \text{ oder } \exp(i\lambda A) = S^{-1} \exp(i\lambda J) S.$$

$(N = \exp(i\lambda A) - E_3 = \exp(i\lambda S^{-1} J S) - E_3 = S^{-1} \exp(i\lambda J) S - E_3)$.
Für $\exp(A) = S \exp(J) S^{-1}$ bekommt man den Punkt **nicht**.

(1Q) : N ist nilpotent $\Leftrightarrow$ $\exp(i\lambda J) - E_3$ is nilpotent.
Man bekommt **(1Q)** auch wenn man eine Formulierung der *Nilpotent-Bedingung*, die nur von J (also nicht von A und S) abhängt, findet.
Man bekommt **(1Q)** auch wenn es nicht explizit geschrieben wird, aber einfach benutzt.

(1R) : Korrekte Berechnung von $\exp(i\lambda J) - E_3$, oder $\exp(i\lambda J)$, oder $\exp(J)$.

(1S) : Benutzten, dass eine obere Dreiecksmatrix nilpotent ist $\Leftrightarrow$ alle diagonale Einträge verschwinden.
Man bekommt **(1S)** auch wenn dies ohne Begründung benutzt wird.

(1S') : Alternativ zu **(1S)**: N ist nilpotent $\Leftrightarrow$ das charakteristische Polynom $p_N(t)$ ist $p_N(t) = \pm t^3$.
Man bekommt den Punkt **nicht**, wenn den Grad des Polynoms $\neq 3$ ist ($\pm t^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist falsch).

(1T) : λ bestimmen. Der Punkt wird vergeben, auch nur für $\lambda \in 2\pi\mathbb{N}$.

3. **Lisa+Horace**

(a) Total: **4 Punkte**.

(1A) Erwähnen, dass das Hauptminorenkriterium benutzt wird. Um den Punkt zu bekommen, muss es explizit erwähnt werden, dass die Hauptminoren betrachtet werden.

(3B) Korrekte Berechung der Determinanten der Hauptminoren:

- **1 Pkt** für $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$,
- **1 Pkt** für $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 4$,
- **1 Pkt** für $\det A = 2$.

(b) Total: **7 Punkte**. Lösung mit Gram-Schmidt: man sollte eine bzgl. A orthonormale Basis $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ finden.

(1C) : Korrekte Berechnung von v_1 mit $\|v_1\|_A = 1$.

(2D) : Korrekte Berechnung von v_2 mit $\|v_2\|_A = 1$.

(2E) : Korrekte Berechnung von v_3 mit $\|v_3\|_A = 1$.

(2F) : Korrekte Berechnung von v_4 mit $\|v_4\|_A = 1$.

- Falls $\|v_1\|_A$ nicht berechnet wird und es gilt $\|v_1\|_A \neq 1$ **(0C)**.
Falls $\|v_1\|_A$ nicht berechnet wird und es gilt $\|v_1\|_A = 1$ **(1C)**.
Falls $\|v_1\|_A$ berechnet wird, aber nicht korrekt ist: **(1C)**.
- Falls die gefundene v_2, v_3, v_4 nicht normiert werden oder die Norm nicht explizit berechnet wird, dann wird jeweils maximal **1 Punkt** vergeben.
- Falls man das Standard Skalarprodukt von $\mathbb{C}$ benutzt, dann werden **2 Punkte abgezogen**.

(c) Total **4 Punkte**.

(4G) für einen korrekten Beweis.

Falls der Beweis nicht korrekt ist:

(1H) für sagen, dass A positiv definit $\Longrightarrow$ alle Eigenwerte von A sind positiv.

(1J) für die Idee, dass A diagonalisiert werden kann: Spektralsatz/Satz von Sylvester/Korollar auf Seite 312 im Fischer.

- Die Punkte **(1H)** und **(1J)** wurden nur gegeben, falls die Behauptung korrekt ist, d.h. es existiert kein solches S.

Viele Studierende sagen/meinen, dass $SAS^T, S \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{R})$ eine Diagonalisierung von A ist und schlussfolgen, dass SAS^T und A dieselbe Eigenwerte haben. Es ist wahr, dass A und SAS^T dieselbe Anzahl von positiven/Null/negativen Eigenwerten haben, aber S *diagonalisiert nicht* A ($S^T \neq S^{-1}$). Man sollte mit dem Korollar auf Seite 324 im Fischer begründen.

4. **Emilio+Horace** (Provisional grading scheme)

   (a) Total: **7 points**.

   i. **3A**, for mentioning the spectral theorem to show that A is diagonalizable over $\mathbb{R}$

   ii. **3B**, for showing that the trace is invariant under conkjugation, and expressing the trace of A^2 it in terms of the eigenvalues of A;

   iii. **1C**, for deducing that all eigenvalues have to vanish, thereby concluding that $A = 0$.

   Remark: full points are assigned for any other correct solution of the exercise, such as mentioning the (square of the) Frobenius norm $\mathrm{tr}(AA^t)$ (**7A"**) or computing explicitly $\mathrm{tr}(A^2)$, using that it is symmetric (**7A'**).

   (b) Total: **8 points**.

   i. **4D**, for realizing that, by the spectral theorem, V has a basis consisting of eigenvectors of A;

   ii. **3E**, for deducing that, under the assumption on the eigenvalues of F, the polynomial $F^2 - 5F + 6$ vanishes on each basis vector. Only 1 point is awarded here for concluding (wrongly) that the characteristic polynomial is $(t-2)(t-3)$, but then deducing the statement correctly via Cayley-Hamilton;

   iii. **1F**, for deducing that $F^2 - 5F + 6 = 0$ as an endomorphism.

   Remarks:

   i. Only 1E (thus 0D,0F) is assigned for simply noticing that the characteristic polynomial of F has the form $(t-2)^\alpha(t-3)^\beta$.

   ii. If the student correctly mentions that the minimal polynomial of F is $(t-2)(t-3)$, but without any justification about the diagonalizability of F, the points assigned are 0D, 1E and 0F.

5. **Horace+Lisa** (Provisional Marking scheme)

   (a) (Solution 1)

i. **(2A)** Correct computation of AA^T or A^TA. A maximum of 1 point can be removed for computational mistakes.
ii. **(2B)** Accurately computing the eigenvalues of the resulting polynomials. Justification or computation is need in case the student computed AA^T, but not for A^TA. A maximum of 1 point can be deducted for computational mistakes.
iii. **(2C)** Computing correctly the Singular values. A maximum of two points may be deducted for computational mistakes. This point shall also be given to people giving the matrix D of the singular value decomposition.
iv. **(1D)** Giving the spectral norm (independently of justification).
v. **(Remarks)** Should a computational mistake affect multiple coming computation, one only removed one point for it.

(Solution 2)

i. **(2A')** Proving that the column vectors of A are orthogonal.
ii. **(2B')** Computing the length of the column vectors of A.
iii. **(2C')** Setting the spectral value to equal the length of the column vectors (only 1 point if no justification).
iv. **(1D')** Finding the spectral norm.

(Solution 3)

i. **(4A")** Finding a SVD by brute force. No points are given in case of a computational mistake.
ii. **(2B")** Finding the singular values from the SVD.
iii. **(1C")** Finding the spectral norm.

(b) (Solution 1)

i. **(2E)** Writing A_k as $A_k = \tilde{U}\tilde{D}'_k\tilde{V}^T$, for some *Zielführend*, defined and welldefined $\tilde{D}'_k$. No points shall be given for hand waving or implicit definition.
ii. **(4F)** Proving the previous decomposition
iii. **(2G)** For a complete proof, or for a proof assuming the correctness of the decomposition in E. 1 point may be given for a student that gets to the expression $\tilde{U}\tilde{D}^2\tilde{V}^T + \tilde{U}_k\tilde{D}_k^2\tilde{V}_k^T - \tilde{U}_k(\tilde{D}_k^2 0)\tilde{V}^T - \tilde{U}\tilde{D}_k^{2''}\tilde{V}_k^T$

(Solution 2)

i. **(3E')** Proving that $\frac{\|(A-A_k)v_i\|}{\|v_i\|} = 0$ for $i \leqslant k$. 1 point is given for a statement without justification.
ii. **(3F')** Proving that $\frac{\|(A-A_k)v_i\|}{\|v_i\|} = \sigma_i$ for $i > k$. 1 Point is given for a statement without justification.
iii. **(2G')** For a complete proof. These points are also given if the students finish the proof assuming E' and F'.

(Solution 3)

i. **(4E")** Expressing correctly A or A_k as

$$\sum_i \sigma_i u_i v_i^T.$$

ii. **(2F")** Expressing correctly $A - A_k$ with those term.

iii. **(2G")** Finishing the proof.

6. **(2 Points) Emilio+Lisa**

(a) Total: **7 points**.

i. **1A**, for mentioning that, if $0 \neq \alpha = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$, then the v_i are linearly independent;

ii. **2B**, for proving the easy inclusion $\operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_p\} \subset \ker f_\alpha$, hence deducing that the dimension of the kernel is at least p;

iii. **4C**, for proving the reverse inclusion, and concluding that the dimension is at most p.

Remark: in case the student says that, correctly, that the v_i are linearly independent and $\ker f_\alpha = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_p)$, but without any proper justification of the latter fact, the points assigned are 1A, 1B and 0C.

(b) Total: **8 points**

i. **2D**, for setting up properly the condition $f_\alpha(v) = 0$, by expressing α as a linear combination of a basis of $\bigwedge^p V$, associated to a basis of V which is obtained by completing a basis of $\ker f_\alpha$;

ii. **4E**, for deducing, from the above setting, correct relations for the coefficients, and in particular that $\dim \ker f_\alpha \leqslant p$;

iii. **2F**, for proving that equality holds only if α is of pure type.