ZUSATZ ZU KAPITEL 5.6
SATZ VON COURANT-FISCHER, MINIMUM-MAXIMUM PRINZIP

THOMAS WILLWACHER

Theorem (Satz von Courant-Fischer, Minimum-Maximum Prinzip)**.** *Sei V ein endlich dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum mit $n = \dim V$, und sei $F \in \mathrm{End}(V)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus. Seien die Eigenwerte*[1] *von F der Grösse nach geordnet*

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Dann gilt

$$\lambda_k = \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} \tag{1}$$

und

$$\lambda_k = \max_{\substack{U \subset V \\ \dim U = n-k+1}} \min_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} \tag{2}$$

Die erste Extremierung wird dabei über Untervektorräume $U \subset V$ der angegebenen Dimension durchgeführt, die zweite über nicht-verschwindende Vektoren in U.

Man beachte, dass für den grössten und kleinsten Eigenwert insbesondere gilt:

$$\lambda_n = \max_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle}$$
$$\lambda_1 = \min_{\substack{x \in V \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

Ausserdem gilt $\langle x, Fx \rangle = \langle Fx, x \rangle$, es ist also unerheblich, ob wir F im ersten oder zweiten Argument des Skalarproduktes einfügen.

Beweis. Es reicht, die erste Aussage, also (1) zu zeigen. Für die zweite Aussage (2) wenden wir die erste Aussage an auf den Endomorphismus $F' = -F$. Die Eigenwerte $\lambda_1' \leq \cdots \leq \lambda_n'$ von F' erfüllen dann offensichtlich $\lambda_k' = -\lambda_{n-k+1}$. Ausserdem wird (1) zu

$$\begin{aligned}
-\lambda_{n-k+1} = \lambda_k' &= \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, (-F)x \rangle}{\langle x, x \rangle} \\
&= \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \left(-\frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} \right) \\
&= \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \left(-\min_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} \right) \\
&= -\max_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \min_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle}.
\end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich äquivalent zu (2), ersetze einfach k durch $n-k+1$ und multipliziere beide Seiten mit -1.

Wir betrachten also nun (1). Sei

$$\mu_k = \min_{\substack{U \subset V \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle},$$

unser Ziel ist also zu zeigen, dass $\mu_k = \lambda_k$. Wir zeigen dies in 2 Schritten:

[1] Man beachte, dass die Eigenwerte reell sind, vgl. Fischer Lemma 5.6.2.

$\mu_k \leq \lambda_k$: Hierfür reicht, ein $U \subset V$ der Dimension k zu finden, so dass

$$\max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_k.$$

Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine ONB von V aus Eigenvektoren von F, so dass $Fv_j = \lambda_j v_j$ für alle j. Dann wählen wir $U = \operatorname{span}(v_1, \ldots, v_k)$.

Dann ist für jedes $x = x_1 v_1 + \cdots x_k v_k \in U$ (mit $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$)

$$\begin{aligned} \langle x, Fx \rangle &= \langle x_1 v_1 + \cdots x_k v_k, \lambda_1 x_1 v_1 + \cdots \lambda_k x_k v_k \rangle = \lambda_1 |x_1|^2 + \cdots + \lambda_k |x_k|^2 \\ &\leq \lambda_k (|x_1|^2 + \cdots + |x_k|^2) = \lambda_k \langle x, x \rangle, \end{aligned}$$

woraus die gewünschte Aussage folgt.

$\mu_k \geq \lambda_k$: Sei $W = \operatorname{span}(v_k, \ldots, v_n)$. Dann gilt, nach der Dimensionsformel für Summen (Lin. Alg. I bzw. Fischer 1.6) für jeden Untervektorraum U der Dimension k

$$\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W - \underbrace{\dim(U + W)}_{\leq n = \dim V} \geq k + n - k + 1 - n = 1.$$

Es gibt also für jedes U wie oben einen nicht-verschwindenden Vektor

$$x = x_k v_k + \cdots + x_n v_n \in U \cap W.$$

Für diesen gilt dann, mit ähnlicher Rechnung wie vorher

$$\langle x, Fx \rangle = \lambda_k |x_k|^2 + \cdots + \lambda_n |x_n|^2 \geq \lambda_k (|x_k|^2 + \cdots + |x_n|^2) = \lambda_k \langle x, x \rangle.$$

Also gilt für jedes $U \subset V$ mit Dimension $\dim U = k$

$$\max_{\substack{x \in U \\ x \neq 0}} \frac{\langle x, Fx \rangle}{\langle x, x \rangle} \geq \lambda_k,$$

und dies zeigt die Behauptung $\mu_k \geq \lambda_k$. □