ZUSATZ ZU DEN KAPITELN 6.3, 6.4
TENSORPRODUKT

THOMAS WILLWACHER

1. Tensorprodukt von Abbildungen

Definition 1.1. *Seien V, V', W, W' Vektorräume über K und $F : V \to V'$, $G : W \to W'$ lineare Abbildungen. Dann ist das Tensorprodukt der Abbildungen F und G die eindeutig definierte lineare Abbildung*

$$F \otimes G : V \otimes W \to V' \otimes W'$$

so dass $(F \otimes G)(v \otimes w) = F(v) \otimes G(w)$ für alle $v \in V, w \in W$.

Etwas ausführlicher sind die linearen Abbildungen $V \otimes W \to V' \otimes W'$ nach der universellen Eigenschaft für $V \otimes W$ bijektiv zu den bilinearen Abbildungen $V \times W \to V' \otimes W'$. Die bilineare Abbildung $(v, w) \mapsto F(v) \otimes G(w)$ entspricht dabei der linearen Abbildung $F \otimes G$. [1]

In der Serie zeigen Sie ferner das folgende Resultat:

Satz 1.2. *Für V, V', W, W' endlich dimensionale K-Vektorräume ist das Tensorprodukt von Abbildungen wie oben*

$$\otimes : \mathrm{Hom}_K(V, V') \otimes \mathrm{Hom}_K(W, W') \to \mathrm{Hom}_K(V \otimes W, V' \otimes W')$$

ein Vektorraumisomorphismus.

Wir wollen uns nun noch anschauen, wie die Matrix von $F \otimes G$ bezüglich einer Basis aussieht. Sei dazu $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_m)$ eine Basis von V, $\mathcal{A}' = (v'_1, \dots, v'_{m'})$ eine Basis von V', $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W und $\mathcal{B}' = (w'_1, \dots, w'_{n'})$ eine Basis von W'. Seien $A = (a_{ij}) = M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}(F)$ und $B = (b_{ij}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(G)$ die entsprechenden Matrizen von F und G. Eine Basis von $V \otimes W$ ist gegeben durch die Familie $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := (v_i \otimes w_j)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Um die Koordinaten von Vektoren bezüglich dieser Basis als Spaltenvektoren schreiben zu können, und entsprechend auch Matrizen aufschreiben zu können, müssen wir die Elemente dieser Basis noch ordnen. Genauer: Wir hatten die Matrix einer Abbildung definiert bezüglich Basen, deren Indexmenge $1, 2 \dots$ war. Wir müssen also die Indexmenge in der Familie $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ noch von $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ auf die Indexmenge $\{1, \dots, mn\}$ abändern. Wie schon in der Vorlesung besprochen, gibt es hierfür zwei natürliche Möglichkeiten:

- Wir können die Ordnung
$$\mathcal{C}_1 := (v_1 \otimes w_1, v_2 \otimes w_1, \dots, v_m \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_m \otimes w_n)$$
verwenden, und entsprechend die Ordnung
$$\mathcal{C}'_1 := (v'_1 \otimes w'_1, v'_2 \otimes w'_1, \dots, v'_{m'} \otimes w'_1, v'_1 \otimes w'_2, \dots, v'_{m'} \otimes w'_{n'})$$
für die entsprechende Basis von $V' \otimes W'$.
- Wir können die Ordnung
$$\mathcal{C}_2 := (v_1 \otimes w_1, v_1 \otimes w_2, \dots, v_1 \otimes w_n, v_2 \otimes w_1, \dots, v_m \otimes w_n)$$
verwenden, und entsprechend die Ordnung
$$\mathcal{C}'_2 := (v'_1 \otimes w'_1, v'_1 \otimes w'_2, \dots, v'_1 \otimes w'_{n'}, v'_2 \otimes w'_1, \dots, v'_{m'} \otimes w'_{n'})$$
für die entsprechende Basis von $V' \otimes W'$.

[1] Man beachte insbesondere, das (im Allgemeinen) nicht jedes Element von $V \otimes W$ von der Form $v \otimes w$ ist!! Tensoren dieser Form nennt man "vom Rang 1", und diese bilden nicht einmal einen Untervektorraum. Sie spannen aber $V \otimes W$ auf.

In jedem Falle ist

$$(F\otimes G)(v_i\otimes w_j)=\sum_{i'=1}^{m'}\sum_{j'=1^{n'}}a_{i'i}b_{j'j}v'_{i'}\otimes w'_{j'}\,.$$

Übersetzt in Matrizenform heisst dies:

$$M^{\mathcal{C}_1}_{\mathcal{C}'_1}(F\otimes G)=\begin{pmatrix}Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots & Ab_{1n}\\ Ab_{21} & Ab_{22} & \cdots & Ab_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Ab_{n'1} & Ab_{n'2} & \cdots & Ab_{n'n}\end{pmatrix}\in M(m'n'\times mn,K)$$

$$M^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{C}'_2}(F\otimes G)=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m'1}B & a_{m'2}B & \cdots & a_{m'm}B\end{pmatrix}\in M(m'n'\times mn,K)$$

Remark 1.3. In der Praxis ist die obige explizite Beschreibung des Tensorproduktes von Abbildungen als Matrix eher in der Numerik relevant – die übliche Software kann oft nur mit Matrizen umgehen, nicht (so gut) mit Tensoren höherer Ordnung. Die obige Operation auf den Matrizen A, B ist z.B. in Matlab mit dem Befehl `kron` (für "Kronecker Produkt") implementiert.

Für theoretische Anwendungen, und insbesondere auch in der Physik, empfiehlt es sich, die "natürliche" Indizierung der Basen von $V\otimes W$ und $V'\otimes W'$ einfach beizubehalten. Ein Physiker würde z.B. mittels des Isomorphismus (für endlich dimensionale Vektorräume) $\mathrm{Hom}(V,V')\cong V^*\otimes V'$ die Abbildung F als Tensor auffassen, bzgl. einer Basis beschrieben durch

$$a_i^{i'}=a_{i'i},$$

und ebenso wird $G\in\mathrm{Hom}(W,W')\cong W^*\otimes W'$ beschrieben durch

$$b_j^{j'}=b_{j'j}.$$

(Kontravariante Indizes schreiben die Physiker als Superskript, kovariante als Subskript.) Dann wäre der Tensor $F\otimes G\in\mathrm{Hom}(V\otimes W,V'\otimes W')\cong V^*\otimes W^*\otimes V'\otimes W'$ in Koordinatenschreibweise einfach

$$c_{ij}^{i'j'}:=a_i^{i'}b_j^{j'}.$$

2. Symmetrisches und äusseres Produkt und (Ko)invariantenräume

Die Darstellungstheorie von Gruppen wird ausführlich in der MMP II Vorlesung im nächsten Jahr behandelt. Hier schonmal ein Vorgriff.

Definition 2.1. *Sei G eine Gruppe und V ein K-Vektorraum. Dann ist eine Darstellung von G auf V ein Gruppenhomomorphismus*

$$\rho:G\to\mathrm{GL}(V),$$

wobei $\mathrm{GL}(V)$ *die Gruppe der Vektorraumisomorphismen von V ist. Man sagt auch "G wirkt auf V".*

Example 2.2.
- Trivialerweise ist eine Darstellung der Gruppe $\mathrm{GL}(V)$ auf V gegeben durch die Identitätsabbildung $\mathrm{GL}(V)\to\mathrm{GL}(V)$.
- Auch trivialerweise ist für jede Gruppe G und jeden Vektorraum V eine Darstellung

  $$\rho:G\to\mathrm{GL}(V)$$

  definiert durch $g\mapsto\rho(g)=id_V$ für alle $g\in G$. Diese nennt man triviale Darstellung von G auf V.
- Etwas interessanter ist die definierende Darstellung con $O(3)$ auf $\mathbb{R}^3$ gegeben durch die Inklusion

  $$O(3)\to\mathrm{GL}(3,\mathbb{R}).$$

- Das für uns hier interessante Beispiel ist wie folgt: Sei wieder V ein beliebiger Vektorraum und betrachte die Darstellung der symmetrischen Gruppe $G=S_n$ auf

  $$\otimes^nV:=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{n\times}$$

  durch Permutation der n Faktoren. Genauer: Der Gruppenhomomorphismus

  $$\rho:S_n\to\mathrm{GL}(\otimes^nV)$$

ist so definiert, dass der Permutation $\sigma \in S_n$ die Abbildung $\rho(\sigma) \in \mathrm{GL}(\otimes^n V)$ zugeordnet wird mit

$$\rho(\sigma)(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots v_n) = v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)}. \tag{1}$$

Übungsaufgabe: Zeigen Sie, dass ρ tatsächlich ein Gruppenhomomorphismus ist.

- Wir können das vorherige Beispiel noch eicht abändern und zusätzlich eine weitere Darstellung definieren
$$\rho_a : S_n \to \mathrm{GL}(\otimes^n V)$$
mit
$$\rho_a(\sigma)(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots v_n) = \mathrm{sign}(\sigma) v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes v_{\sigma^{-1}(2)} \otimes \cdots v_{\sigma^{-1}(n)}. \tag{2}$$

Zu einer Darstellung ρ von G auf V können wir nun insbesondere die zwei folgenden Vektorräume betrachten:

- Den Raum der (G-)Invarianten
$$V^G := \{v \in V \mid \rho(g)(v) = v \forall g \in G\} \subset V.$$
Dies ist ein Untervektorraum von V als Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssysteme $\rho(g)(v) = v$ (mit einer solchen Gleichung für jedes $g \in G$).
- Den Raum der Koinvarianten
$$V_G := V/U$$
mit
$$U := \mathrm{span}\{v - \rho(g)(v) \mid v \in V, g \in G\} \subset V.$$
V_G ist ein Quotientenraum von V.

Wir haben also kanonische Abbildungen

$$V^G \to V \to V_G.$$

Satz 2.3. *Sei G eine endliche Gruppe und ρ eine Darstellung von G auf dem K-Vektorraum V. Nehme an, dass* $\mathrm{char}(K)$ *die Gruppenordnung $|G|$ nicht teilt, also dass $|G| \neq 0$ in K ist. Dann ist die kanonische Abbildung $V^G \to V_G$ ein Isomorphismus, und die inverse Abbildung ist gegeben durch die Symmetrisierung*

$$\begin{aligned} V_G &\to V^G \\ v + U &\mapsto \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v). \end{aligned} \tag{3}$$

Beweis. Wir wollen zunächst zeigen, dass die Symmetrisierung (3) wohldefiniert ist. Zum einen ist $|G| \neq 0$ in K nach Voraussetzung, also dürfen wir durch $|G|$ teilen. (Implizit verwenden wir, dass wir für jeden Körper K eine kanonische Abbildung $\mathbb{Q} \to K$ haben, also können wir $|G| \in \mathbb{Z}$ auch auffassen als Element des Körpers K.) Als zweites müssen wir prüfen, dass die Summe in (3) auf $U \subset$ verschwindet, so dass die Abbildung tatsächlich wohldefiniert ist auf dem Quotienten $V_G = V/U$. Es gilt aber für alle (festen) $h \in G$:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \rho(g)(v - \rho(h)(v)) &= \sum_{g \in G} \rho(g)(v) - \sum_{g \in G} \rho(gh)(v) \\ &= \sum_{g \in G} \rho(g)(v) - \sum_{g' \in G} \rho(g')(v) = 0 \end{aligned}$$

Hier wurde in der 2. Zeile die Homomorphismuseigenschaft von ρ ausgenutzt und in der dritten die Summationsvariable $g' = gh$ substituiert. (Man erinnere sich, dass die Rechtsmultiplikation mit h eine Bijektion auf G ist.) Als drittes müssen wir noch prüfen, dass das Bild tatsächlich in V^G liegt, also G-invariant ist. Dies geht ähnlich:

$$\begin{aligned} \rho(h)\left(\sum_{g \in G} \rho(g)(v)\right) &= \sum_{g \in G} \rho(h)(\rho(g)(v)) \\ &= \sum_{g \in G} \rho(hg)(v) = \sum_{g' \in G} \rho(g')(v) \\ &= \sum_{g \in G} \rho(g)(v). \end{aligned}$$

Zuletzt müssen wir nur noch prüfen, dass die Symmetrisierung tatsächlich eine Inverse zur kanonischen Abbildung $V^G \to V_G$ ist. Sei dazu zunächst $v \in V^G$ ein G-invariantes Element. Das Bild in V_G ist dann einfach $v + U$. Die Symmetrisierung davon ist

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = v.$$

Sei zum Schluss noch $v + U \in V_G$. Symmetrisierung überführt dieses Element in

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v) \in V^G.$$

In V_G wird dies zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v) + U &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)(v) + \underbrace{v - \rho(g)(v)}_{\in U} + U \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v + U = v + U. \end{aligned}$$

□

Wir wenden dies nun an auf das symmetrische und äussere Produkt. Sei dazu immer vereinfachend <u>K ein Körper der Charakteristik 0</u>, so dass die entsprechende Voraussetzung im Satz immer erfüllt ist, und so dass wir alternierende Bilinearformen mit schiefsymmetrischen identifizieren können.

- Das symmetrische Produkt haben wir als die Koinvarianten definiert
$$\vee^n V = (\otimes^n V)_{S_n},$$
wobei hier die Wirkung der symmetrischen Gruppe S_n aus (1), also ohne Vorzeichen, zu Grunde gelegt ist.
- Das äussere Produkt kann man analog definieren als die Koinvarianten
$$\wedge^n V = (\otimes^n V)_{S_n},$$
wobei nun aber die Darstellung mit Vorzeichen (2) verwendet wird. (Man beachte, dass die Darstellung in der Notation unterschlagen wird, und dass hier $\mathrm{char}(K) = 0$ angenommen ist.)
- Je nach Kontext und Anwendung wird das symmetrische bzw. äussere Produkt manchmal auch als Invarianten definiert. Dies ist gerechtfertigt durch den obigen Satz, der insbesondere besagt, dass (Achtung: in Charakteristik 0) Invarianten und Koinvarianten natürlich identifiziert werden können,
$$(\otimes^n V)_{S_n} \cong (\otimes^n V)^{S_n}.$$
- Wir haben diese Identifikation von Invarianten und Koinvarianten auch schon implizit in der Vorlesung gesehen. Der Raum der Bilinearformen auf dem endlich dimensionalen Vektorraum V sind z.B. identifiziert mit $(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$. Die symmetrischen Bilinearformen sind gerade die, die invariant sind unter der S_2-Wirkung (ohne Vorzeichen)
$$\mathrm{Sym}^2(V; K) \cong (V^* \otimes V^*)^{S_2} \subset \mathrm{Bil}(V; K).$$
Wir haben gesehen, dass man dies identifizieren kann mit $V^* \vee V^* = (V^* \otimes V^*)_{S_2}$ falls $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Analoges gilt für das äussere Produkt, wobei man dabei in diesem Fall noch die Beschränkung an die Charakteristik fallen lassen konnte.