Übungsserie 1

Abgabe bis zum 2. März
Bewertete Aufgaben: (3+7)[1],(4+8)[1],13
Weitere empfohlene Aufgaben: 1,9,10,11,12,14,15

Aufgabe 1. Sei X eine endliche Menge, und τ eine Hausdorff'sche Topologie auf X. Zeigen Sie, dass τ die diskrete Topologie ist.

Aufgabe 2. Wie viele Topologien gibt es auf der Menge $\{0,1\}$? Und auf der Menge $\{0,1,2\}$?

Aufgabe 3. Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand folgender Teilmengen Y von $\mathbb{R}$, für die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

(1) $Y = [0,1]$
(2) $Y = \mathbb{Q}$
(3) $Y = \varnothing$
(4) $Y = (0,1)$
(5) $Y = [-1,1) \setminus \{0\}$
(6) $Y = [0,\infty)$
(7) $Y = \{0\}$
(8) $Y = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

Aufgabe 4. Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss und den Rand folgender Teilmengen Y von $[0,1]$, für die Standardtopologie auf $[0,1]$, welche als Unterraumtopologie von $\mathbb{R}$ induziert wird.

(1) $Y = [0,1]$
(2) $Y = \mathbb{Q} \cap [0,1]$
(3) $Y = [0,1)$
(4) $Y = (0,1)$

Aufgabe 5. Sei τ_+ die folgende Familie derjenigen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaft haben:

$$\forall u \in U \, \forall x \in \mathbb{R} : \quad u \leq x \implies x \in U$$

Zeigen Sie, dass τ_+ eine Topologie auf $\mathbb{R}$ ist. Welche Funktionen $f : (\mathbb{R}, \tau_+) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_+)$ sind bezüglich dieser Topologie stetig?

[1] Zählen als eine Aufgabe zusammen

Aufgabe 6. Sei X eine Menge. Sei τ die Familie aller Teilmengen $U \subseteq X$ mit der Eigenschaft, dass $X \setminus U$ endlich ist, oder $U = \varnothing$ gilt. Überprüfen Sie, dass die so beschriebene Familie τ von Teilmengen von X eine Topologie ist. Sie heisst **koendliche Topologie**.

Aufgabe 7. Beschreiben Sie die Menge aller stetigen Funktionen $\mathbb{R} \longrightarrow \{0,1\}$, wobei die Topologie auf $\{0,1\}$ jeweils gegeben ist durch

(1) $\tau_0 = \{\varnothing, \{0,1\}\}$,
(2) $\tau_1 = \{\varnothing, \{1\}, \{0,1\}\}$,
(3) $\tau_2 = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$.

Benutzen Sie für ihre Antwort den Begriff der **charakteristischen Funktion** (siehe Paragraph 2.45 im Skript). Überlegen Sie sich auch, wie die Antworten aussehen für einen allgemeinen topologischen Raum X und stetige Funktionen $X \longrightarrow \{0,1\}$.

Aufgabe 8. Betrachten Sie die Menge $X = \mathbb{R}$ mit einer Topologie τ, welche alle Mengen der Form $(a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ enthält (die Topologie muss aus den Axiomen her natürlich noch mehr enthalten, Vereinigungen, usw).

(1) Zeigen Sie, dass alle Intervalle der Form (a,b), (a,∞) und $(-\infty,b]$ auch in τ sind. Ist $[a,b)$ auch offen?
(2) Schliessen Sie, dass jede Menge U, welche in der Standardtopologie von $\mathbb{R}$ offen ist, auch in der Topologie τ offen ist.
(3) Begründen Sie, warum die Topologie τ strikt mehr Elemente besitzt als die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe 9. Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x \in X$ und sei $r \geq 0$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \leq r\}$$

bezüglich der von d induzierten Topologie auf X abgeschlossen ist. Stimmt es, dass die Menge $\overline{B}(x,r)$ der Abschluss von $B(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$ ist?

Aufgabe 10. Sei X ein topologischer Raum, Y eine Menge und $\pi : X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Wir definieren durch

$$\tau := \{U \subseteq Y \mid \pi^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\}$$

die sogenannte **Quotiententopologie** auf Y.

(1) Zeigen Sie, dass τ eine Topologie auf Y ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Quotiententopologie genau die Topologie auf Y ist, so dass
   (a) die Abbildung $\pi : X \longrightarrow Y$ stetig ist; und
   (b) für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $f : Y \longrightarrow Z$ gilt, dass f genau dann stetig ist, wenn $f \circ \pi$ stetig ist.

Aufgabe 11. Wir betrachten das Quadrat $Q := [0,1] \times [0,1]$ und definieren eine Äquivalenzrelation $\sim$ via

$$(x,y) \sim (x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - x'| = 1 \text{ und } y = y'.$$

Sei $Y = X/\sim$ die Menge der Äquivalenzklassen und $\pi : X \longrightarrow Y, x \longmapsto [x]$ die kanonische Surjektion. Wir versehen nun Y mit der Quotiententopologie (siehe Aufgabe 10).

(1) Beschreiben Sie die offenen Umgebungen der Punkte $\pi(x,y)$ für $(x,y) \in (0,1) \times [0,1]$, sowie der Punkte $\pi(0,y)$ und $\pi(1,y)$ für $y \in [0,1]$. Können Sie Y skizzieren?

(2) Was ändert sich, wenn wir die Äquivalenzrelation $\approx$ gegeben durch

$$(x,y) \approx (x',y') \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x - x'| = 1 \text{ und } y = 1 - y'$$

anstelle von $\sim$ auf Q verwenden? Können Sie auch hier Y skizzieren?

Aufgabe 12. Seien X und Y topologische Räume und seien A_1 und $A_2 \subset X$ abgeschlossene Teilmengen von X mit $X = A_1 \cup A_2$. Seien $f_1 : A_1 \longrightarrow Y$ und $f_2 : A_2 \longrightarrow Y$ stetige Funktionen mit $f_1(x) = f_2(x)$ für alle $x \in A_1 \cap A_2$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : X \longrightarrow Y$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{falls } x \in A_1 \\ f_2(x) & \text{falls } x \in A_2 \end{cases}$$

wohldefiniert und stetig ist.

Aufgabe 13. Sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Skizzieren Sie (zum Beispiel für $n = 4$) die folgende offene Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_{n-1}\}$ von $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ gegeben durch

$$U_i = \left(\frac{i-1}{n}, \frac{i+1}{n} \right).$$

Besitzt diese Überdeckung eine Lebesgue Zahl? Wenn ja, finden Sie eine möglichst grosse (bzw die grösste in Abhängigkeit von n).
Finden Sie ausserdem eine offene Überdeckung von $(0,1)$, welche keine Lebesgue Zahl besitzt.

Aufgabe 14. Sei X ein diskreter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass X genau dann kompakt ist, wenn X endlich ist.

Aufgabe 15. Sei X ein kompakter topologischer Raum. Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Teilmenge von X kompakt ist.

Aufgabe 16 (Lektüre)**.** Man kann mit Hilfe einer speziellen Topologie auf $\mathbb{Z}$ zeigen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Wie dies genau funktioniert kann in [AZ14] nachgelesen werden.

Literatur

[AZ14] M. Aigner and G. M. Ziegler, *Das BUCH der Beweise*, Springer, (2014)