Übungsserie 10

Abgabe bis zum 11. Mai
Bewertete Aufgaben: 1,3,11
Weitere empfohlene Aufgaben: 6,7,8,10

Aufgabe 1. Der Begriff uneigentlicher Riemann-integrale aus dem ersten Semester ist *nicht* kompatibel mit dem Begriff mehrdimensionaler uneigentlicher Riemann-integrale. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 1 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist als eindimensionales Integral, in dem Sinn also, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ beide Grenzwerte in der Summe

$$\lim_{R\to\infty} \int_{x_0}^{R} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{x_0} f(x)dx$$

existieren. Zeigen Sie anschliessend, dass die Funktion f in der Theorie mehrdimensionaler uneigentlicher Integrale nicht integrierbar ist, in dem Sie verschiedene Ausschöpfungen $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ von $\mathbb{R}$ konstruieren, welche verschiedene Grenzwerte

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f(x)dx$$

haben.

Das Beispiel wurde in der Vorlesung schon angesprochen. Seien Sie in ihrer Begründung genau. Sie dürfen Satz 7.21 verwenden.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ symmetrisch und positiv definit. Zeigen Sie

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\langle Ax, x\rangle)dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det A}}$$

Aufgabe 3. Für $x, y > 0$ ist die **Betafunktion** durch

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

definiert.

(1) Zeigen Sie, dass
$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$
gilt, wobei $\Gamma : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Gamma Funktion
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1}\, du$$
ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Abbildung $\Psi : (0,\infty) \times (0,1) \longrightarrow (0,\infty) \times (0,\infty)$ gegeben durch $\Phi(z,t) = (zt, z(1-t))$ ein Diffeomorphismus ist.

(2) Berechnen Sie die folgenden Integrale
$$\Gamma(1) \qquad \text{und} \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

(3) Zeigen Sie die Funktionalgleichung
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

(4) Berechnen Sie das folgende Integral
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-t}{t}} dt.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass das das Gravitationsfeld der Kugel $B = \overline{B(1,0)} \subseteq \mathbb{R}^3$ an jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^3 \setminus B$ dem einer Punktmasse in 0 entspricht, indem Sie das Potential
$$V(y) = \int_B -\|x-y\|^{-1}\, dx$$
berechnen, und überprüfen, dass dieses proportional zu $1/\|y\|$ ist.
Führen Sie dieselbe Rechnung für $y \in B$ durch. Welche zusätzlichen Schwierigkeiten ergeben sich?

Aufgabe 5. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f \colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Zeigen Sie, dass die Fortsetzung $f_! \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ von f durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ kompakten Träger hat. Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f \colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, welche in B als Teilraum von $\mathbb{R}^n$ keinen kompakten Träger hat.

Aufgabe 6. Es bezeichne $\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} \mid y > 0\}$ die Poincaré Halbebene. Für eine kompakte, Jordan-messbare Menge $A \subseteq \mathbb{H}$ definieren wir den hyperbolischen Flächeninhalt als
$$\mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(A) = \int_A \frac{1}{y^2} d(x,y).$$
Zeigen Sie, dass die Diffeomorphismen $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ der Form
$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$
den hyperbolischen Flächeninhalt invariant lassen, d.h. für alle Jordan-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{H}$ gilt $\mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(\varphi(A)) = \mathrm{vol}_{\mathbb{H}}(A)$.

Definition. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(D) > 0$. Der **Schwerpunkt** $\mathrm{bary}(D) \in \mathbb{R}^n$ **von** D ist definiert als

$$\mathrm{bary}(D) = \frac{1}{\mathrm{vol}(D)} \int_D (x_1, \ldots, x_n)\, d\,\mathrm{vol}(x_1, \ldots, x_n).$$

Hierbei verstehen wir vektorwertige Integration komponentenweise; siehe Definition vor Aufgabe 3 in Serie 9.

Aufgabe 7. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar mit $\mathrm{vol}(D) > 0$ und sei $\varphi \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ von der Form $\varphi(x) = Ax + b$ mit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$.

(1) Zeigen Sie, dass $\varphi(\mathrm{bary}(D)) = \mathrm{bary}(\varphi(D))$ gilt. Stimmt die Aussage immer noch, wenn wir nur $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ fordern?

(2) Folgern Sie aus (1), dass

$$\mathrm{bary}(D) \in \mathrm{Fix}(\varphi) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) = x\},$$

falls $\varphi(D) = D$ gilt.

Aufgabe 8. Berechnen Sie den Schwerpunkt der Menge

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < (x-1)^2 + 4(y-2)^2 + 9(z-3)^2 < 4\}.$$

Hinweis: Rechnen Sie direkt nach oder benutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 7.

Aufgabe 9. Sei $X = \{K \subset \mathbb{R}^n \mid K \text{ kompakt, Jordan-messbar und} \,\mathrm{vol}(K) > 0\}$, und es bezeichne $d \colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ den Hausdorff-Abstand (siehe Serie 4 Aufgabe 11 aus dem Herbstsemester).
Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathrm{bary} \colon (X, d_H) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ **nicht** stetig ist.

Aufgabe 10. (1) Jede offene Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ kann als abzählbare Vereinigung von offenen Bällen geschrieben werden.

(2) Jede abzählbare Vereinigungen ausschöpfbarer Mengen ist ausschöpfbar.

(3) Jede offene Menge ist ausschöpfbar.

(4) Jede offene Menge ist ausschöpfbar durch kompakte Mengen.

Aufgabe 11. Jede k-dimensionale kompakte Teilmannigfaltigkeit M in $\mathbb{R}^n$ kann als Nullstellenmenge einer glatten Funktion $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ geschrieben werden.

Aufgabe 12. (Challenge) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ eine uneigentlich Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass auch $|f| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.