Übungsserie 2

Abgabe bis zum 9. März
Bewertete Aufgaben: 4,9,15
Weitere empfohlene Aufgaben: 1,2,7,10

Aufgabe 1 und 2 dieser Serie sowie Aufgabe 12 und 15 der Serie 1 sind sehr fundamentale Aussagen, sie werden mehrmals in den anderen Aufgaben verwendet.

Aufgabe 1. Seien X, Y topologischer Räume. Zeigen Sie, dass $f : X \longrightarrow Y$ genau dann stetig ist, wenn $f^{-1}(A) \subseteq X$ für alle abgeschlossenen Mengen $A \subseteq Y$ auch abgeschlossen ist.

Aufgabe 2. Sei X ein Hausdorffraum. Zeigen Sie, dass jede kompakte Teilmenge $C \subseteq X$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 3. Seien X und Y topologische Räume, wobei X kompakt und Y Hausdorff sei. Weiter sei $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige und bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum (nicht unbedingt ein metrischer Raum!) und seien A, B kompakte Teilmengen von X. Zeigen Sie

(1) dass $A \cup B$ kompakt ist.
(2) dass falls X Hausdorff ist, $A \cap B$ kompakt ist.

Aufgabe 5. Diese Aufgabe konstruiert ein Beispiel, bei dem der Schnitt zweier kompakter Mengen nicht kompakt ist. Sei $X = \mathbb{R} \times \{-1\} \cup \mathbb{R} \times \{1\}$ die Menge bestehend aus zwei disjunkten Geraden. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf X durch

$$(x, -1) \sim (y, 1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = y \quad \text{und} \quad x \neq 0.$$

(1) Beschreiben Sie die Menge $Y = X/\sim$ der Äquivalenzklassen.
(2) Wir betrachten nun die Quotiententopologie auf Y (vergleichen Sie Aufgaben 10, 11 aus Serie 1), welche durch die Projektion $X \longrightarrow Y$ auf die Äquivalenzklassen induziert wird. Beschreiben Sie die Topologie auf Y, in dem Sie die offenen Umgebungen der Punkte in Y beschreiben.

(3) Finden Sie zwei Punkte in Y, welche die Hausdorff Eigenschaft nicht erfüllen.
(4) Finden Sie zwei kompakte Teilmengen von Y, so dass ihr Schnitt nicht kompakt ist.

Aufgabe 6. Sei X ein topologischer Raum und sei $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass die Menge der Nullstellen $\{x \in X \mid f(x) = 0\}$ abgeschlossen in X ist. Überprüfen Sie, dass die Abbildung

$$\det : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig ist, wobei $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ den Raum der $n \times n$ Matrizen mit reellen Koeffizienten bezeichnet, versehen mit der Standardtopologie. Folgern Sie daraus, dass die Menge der singulären Matrizen $\{A \mid \det(A) = 0\}$ abgeschlossen in $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 7. Wir betrachten die Gruppe der speziellen orthogonalen 2×2-Matrizen

$$\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) = \{X \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \mid \det X = 1, X^T X = \mathbb{1}_2\}$$

und versehen sie mit der Teilraumtopologie induziert von $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$.

(1) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$ kompakt ist.
(2) Zeigen Sie, dass

$$\phi : \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{S}^1, X \longmapsto X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein Homöomorphismus ist, wobei $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Aufgabe 8. Die **Operatornorm** einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ ist durch

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \sup\left\{\|Ax\|_2 \;\middle|\; x \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \|x\|_2 \leq 1\right\}$$

definiert, wobei $\|\cdot\|_2$ für die Euklidische Norm steht. Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{\mathrm{op}}$ in der Tat eine Norm auf dem Vektorraum $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ definiert. Zeigen Sie weiter, dass

$$\|Ax\|_2 \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|x\|_2 \qquad \text{und} \qquad \|AB\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_{\mathrm{op}} \|B\|_{\mathrm{op}}.$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A, B \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$ gilt.

Aufgabe 9. (1) Seien X, Y topologische Räume, wobei X zusammenhängend und Y diskret ist. Zeigen Sie, dass jede stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ konstant ist.
(2) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene nichtleere zusammenhängende Menge. Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{Q}$ konstant ist.

Aufgabe 10. Sei X ein topologischer Raum. Beweisen Sie im Detail, dass die Relation

$$x_0 \sim x_1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{Es existiert ein Pfad von } x_0 \text{ nach } x_1.$$

auf der Menge X eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 11. Skizzieren Sie die folgenden topologischen Räume $X \subseteq \mathbb{R}^n$ oder $X \subseteq \mathbb{C}$, und entscheiden Sie (ohne Beweis) welche davon zusammenhängend, und welche einfach zusammenhängend sind. Verlassen Sie sich dabei auf Ihre Intuition.

(1) $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \neq 0\}$ für $n = 1, 2, 3$
(2) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } |z - n| = r\}$ für reelle $r > 0$.
(3) $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } |z - n| < r\}$ für reelle $r > 0$.
(4) $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^n + y^n = z^n\}$ für $n = 1, 2$.

Aufgabe 12. Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst **konvex** falls für alle $x, y \in U$ und alle $t \in [0, 1]$ auch $tx + (1 - t)y$ ein Element von U ist. Skizzieren Sie einige konvexe und nicht konvexe Teilmengen in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, und beweisen Sie, dass jede konvexe Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 13. Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ zusammenhängend. Dann ist auch der Abschluss $\overline{Y} \subseteq X$ zusammenhängend.

Aufgabe 14. Skizzieren Sie den Teilraum $X \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$X = \{0\} \times [-1, 1] \cup \{(t, \sin(\tfrac{1}{t})) \mid t > 0\}$$

und zeigen Sie, dass X zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

Aufgabe 15. Lesen Sie Kapitel 10.5.4 im Skript und finden Sie Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, welche zeigen, dass die Implikationen

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5)$$

allesamt nicht wahr sind. Begründen Sie, warum ihr Beispiel funktioniert, verweisen Sie auf Aufgaben in den Serien oder auf Resultate im Skript.

Aufgabe 16. Sei X ein topologischer Raum, seien $x_0, x_1 \in X$, und $P(x_0, x_1)$ bezeichne die Menge aller Pfade in X von x_0 nach x_1. Zeigen sie, dass die Relation

$$\gamma_0 \sim \gamma_1 \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_1 \text{ ist homotop zu } \gamma_0$$

auf der Menge $P(x_0, x_1)$ eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 17 (Recherche)**.** Finden Sie heraus was die **Fundamentalgruppe** eines topologischen Raums ist und geben Sie ein paar interessante Beispiele an. Was ist die Fundamentalgruppe des zweidimensionalen Torus?

Aufgabe 18. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, und es bezeichne $V = C(D, \mathbb{R})$ den Vektorraum aller stetigen, reellwertigen Funktionen auf U. Für $f \in V$, eine kompakte Teilmenge $T \subseteq D$ und eine reelle Zahl $r > 0$ schreiben wir

$$B(f, T, r) = \{g \in V \mid |g(t) - f(t)| < r \text{ für alle } t \in T\}$$

Wir bezeichnen eine Teilmenge $U \subseteq V$ als *offen*, falls für jedes $f \in U$ eine kompakte Teilmenge $T \subseteq D$ und $r > 0$ existieren, mit $B(f, T, r) \subseteq U$. Zeigen Sie:

(1) Sei $f \in B(f_1, T_1, r_1) \cap B(f_2, T_2, r_2)$. Dann existiert eine kompakte Teilmenge $T \subseteq U$ und $r > 0$ mit $B(f, T, r) \subseteq B(f_1, T_1, r_1) \cap B(f_2, T_2, r_2)$.

(2) Zeigen Sie, dass die als offen bezeichneten Teilmengen von V tatsächlich eine Topologie auf V bilden, und V damit zu einem topologischen Vektorraum wird. Diese Topologie nennen wir **Topologie der kompakten Konvergenz**.

Hinweis: Das ist eine lange Aufgabe, in der der gesamte Stoff über topologische Vektorräume revidiert wird. Ich empfehle Ihnen die Aufgabe im Team zu bearbeiten, und von allen verfügbaren Ressourcen Gebrauch zu machen. Eine optimale Lösung zu dieser Aufgabe ist ein gut strukturierter Text (Lemma, Proposition, Beweis, etc.) in dem die Topologie der kompakten Konvergenz korrekt eingeführt wird.

Aufgabe 19 (Challenge)**.** Konstruieren Sie einen kompakten topologischen Raum X, der nicht folgenkompakt ist wie folgt. Sei X die Menge aller Funktionen $f : [0,1] \longrightarrow \{0,1\}$. Wir nennen eine Teilmenge $U \subseteq X$ *offen* falls für jedes $f \in U$ eine endliche Teilmenge $E \subseteq [0,1]$ existiert, so, dass

$$B(f, E) = \{g \in X \mid f(x) = g(x) \text{ für alle } x \in E\}$$

in U enthalten ist. Zeigen Sie:

(1) Die eben eingeführten offenen Teilmengen von X bilden tatsächlich eine Topologie.

(2) Bezüglich dieser Topologie ist X kompakt und Hausdorff'sch.

(3) Bezüglich dieser Topologie ist X nicht folgenkompakt. Betrachten Sie dazu die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch

$$f_n(x) = n\text{-te Ziffer in der Binärbruchentwicklung von } x.$$

Falls eine Zahl $x \in [0,1]$ zwei Binärbruchentwicklungen hat, so ziehen wir diejenige vor, die in $\ldots 0000 \ldots$ endet. Argumentieren Sie nun wie in Cantor's Diagonalargument: Angenommen $(f_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ sei eine konvergente Teilfolge. Definieren Sie $y \in [0,1]$ durch

$$n\text{-te Ziffer in der Binärbruchentwicklung von } y = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = n_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen Sie, dass $(f_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ nicht konvergiert in dem Sie $(f_{n_k}(y))_{k=0}^{\infty}$ untersuchen.