# Übungsserie 4

Abgabe bis zum 23. März
Bewertete Aufgaben: 1,7,11
Weitere empfohlene Aufgaben: 2,4,6,13

**Aufgabe 1.** Für reelle Zahlen $\alpha > -1$ kennen wir das Integral

$$\int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

Leiten Sie daraus den Wert für das Integral

$$\int_0^1 \log(x)^4 x^2 dx$$

her.
Hinweis: Betrachten Sie das erste Integral als Parameterintegral.

**Aufgabe 2.** Das vollständige elliptische Integral zweiter Art ist die durch das Parameterintegral

$$E(x) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 t}\,dt$$

gegebene Funktion $E : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $E$ der Differentialgleichung

$$(x^2-1)xE''(x) + (x^2-1)E'(x) - xE(x) = 0$$

genügt. Wir gehen dazu wie folgt vor:

(1) Sei

$$K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-x^2\sin^2 t}}.$$

Zeigen Sie die beiden Relationen

$$xE'(x) = E(x) - K(x) \qquad \text{und} \qquad xK'(x) = \frac{E(x)}{1-x^2} - K(x).$$

(2) Schliessen Sie, dass $E$ die Differentialgleichung in der Aufgabe erfüllt.

**Aufgabe 3.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die **Bessel-Funktion zweiter Gattung** ist durch das uneigentliche Integral

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(x\sin(t) - nt)x\sin(t)dt - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \big(\exp(t) + (-1)^n \exp(-nt)\big)\exp(-x\sinh(t))dt$$

für $x \in (0,\infty)$ definiert. Es kann gezeigt werden, dass $Y_n$ die Bessel Differentialgleichung ebenfalls löst. Es gilt

$$(*) \qquad \lim_{x\to 0} J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt)dt \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} Y_n(x) = -\infty,$$

wobei $J_n$ die Besselfunktion erster Gattung aus der Vorlesung bezeichnet. Dies zeigt, dass $J_n$ und $Y_n$ linear unabhängig sind.

(1) Zeigen Sie, dass die Bessel-Funktion $Y_n$ zweiter Gattung wohldefiniert ist und beweisen Sie die Asymptotik in $(*)$.

(2) Nehmen Sie eine geeignete Verallgemeinerung der Differentiation unter dem Integral für das uneigentliche Integrale an (analog zu Aufgabe 4(1)), und beweisen Sie damit, dass $Y_n$ eine Lösung der Bessel-Differentialgleichung ist.

**Aufgabe 4.** In Aufgabe 6 Serie 13 im Herbstsemester haben wir die Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

für $x \in (0,\infty)$ kennengelernt. Wir wollen ihre Ableitung berechnen.

(1) Um die Ableitung mit dem Integral zu vertauschen, führen wir eine Variabelntransformation durch, so dass das uneigentliche Integral in ein Integral über ein kompaktes Intervall umgewandelt wird. Sei dazu

$$f(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t = 0, \\ e^{-t}t^{x-1} & \text{falls } t > 0 \end{cases}$$

auf $(0,\infty)\times[0,\infty)$ und

$$F(x,s) = \begin{cases} 0 & \text{falls } s = 0 \\ \dfrac{f(x,s^{-1})}{s^2} & \text{falls } s > 0 \end{cases}$$

auf $(0,\infty)\times[0,1]$. Zeigen Sie, dass

$$\int_1^\infty f(x,t)dt = \int_0^1 F(x,s)ds$$

gilt und dass $F$ alle Voraussetzungen vom Satz über das Vertauschen von Integral und Ableitung erfüllt sind.

(2) Berechnen Sie die Ableitung $\Gamma'$.

(3) (Challenge) Berechnen Sie $\Gamma'(1)$ explizit.

**Aufgabe 5.** (stetige Funktionen mit kompaktem Träger durch glatte Funktionen approximieren) Sei $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit kompaktem Träger, sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$. Es existiert eine glatte Funktion $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ derart, dass

$$\|f(x) - \widetilde{f}(x)\| < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad B(x,\delta)\cap \operatorname{supp}(f) = \varnothing \implies \widetilde{f}(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

**Aufgabe 6.** Finden Sie zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ mit Trägern

$$\operatorname{supp}(f) \subseteq (-\infty, 2) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{supp}(g) \subseteq (-1, \infty)$$

und so dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) + g(x) = 1$$

gilt.

(1) Finden Sie stetige solche Funktionen $f, g$.
(2) Finden Sie glatte solche Funktionen $f, g$.

Man nennt solche Funktionen in (2) *(glatte) Zerlegung der Eins* bezüglich der offenen Überdeckung $\mathcal{U} = \{(-\infty, 2), (-1, \infty)\}$ von $\mathbb{R}$.

**Aufgabe 7.** Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die stetige Funktion gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x \leq 0, \\ x, & \text{für } x > 0. \end{cases}.$$

Betrachten Sie die Funktionen $f_\epsilon = \delta_\epsilon * f$, wobei $\delta_\epsilon$ Glättungskerne (wie in Aufgabe 4) mit Träger $\operatorname{supp}(\delta_\epsilon) \subseteq (-\epsilon, \epsilon)$ und welche symmetrisch (bzw gerade) sind, also $\delta_\epsilon(-x) = \delta_\epsilon(x)$.

(1) Zeigen Sie zuerst, dass $f_\epsilon(x) = f(x)$ für $x \leq -\epsilon$ und für $x \geq \epsilon$.
(2) Zeigen Sie, dass $|f_\epsilon(x) - f(x)| \leq \epsilon$ für alle $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.
(3) Erklären Sie die folgende Aussage: Die Funktion $f$ liegt im Abschluss der glatten Funktionen bezüglich der Topologie der gleichmässigen Konvergenz.

**Aufgabe 8** (Challenge)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und $\gamma \colon [0,1] \longrightarrow U$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg. Weiter sei $F \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Seien $\varepsilon, \delta > 0$. Zeigen Sie mit dem Resultat aus Aufgabe 3, dass es einen glatten Weg $\eta \colon [0,1] \longrightarrow U$ gibt, mit

$$\|\gamma(t) - \eta(t)\| < \delta \text{ für alle } t \in [0,1] \qquad \text{und} \qquad \left| \int_\gamma F dt - \int_\eta F dt \right| < \varepsilon$$

Folgern Sie daraus: Ein stetiges Vektorfeld $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ wenn für alle *glatten* Wege $\gamma_0$ und $\gamma_1$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ die Gleichheit

$$\int_{\gamma_0} F dt = \int_{\gamma_1} F dt$$

gilt.

**Aufgabe 9.** Eine **Schlaufe** in einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^n$ ist ein Weg $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ mit $\gamma(0) = \gamma(1)$. Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann konservativ ist, wenn für jede stückweise stetig differenzierbare Schlaufe $\gamma$ in $U$

$$\int_\gamma F dt = 0$$

gilt.

**Aufgabe 10.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend, und sei $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld. Zeigen Sie, dass Potentiale von $F$ sich um Konstanten unterscheiden.

**Aufgabe 11.** Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x,y) = \left( \frac{x(x^2+2y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \frac{y^3}{(x^2+y^2)^2} \right).$$

Sei $\gamma : [0,1] \longrightarrow U$ der Pfad gegeben durch

$$\gamma(t) = (1-t, t).$$

Wir wollen das Wegintegral $\int_\gamma F dt$ auf drei verschiedene Arten berechnen.

(1) Direkt.
(2) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld konservativ ist und finden Sie einen Pfad $\eta$ von $\gamma(0)$ zu $\gamma(1)$, welcher ein einfacher zu berechnendes Wegintegral hat und berechnen sie dieses.
(3) Finden Sie ein Potential und berechnen Sie damit das Wegintegral.

Hinweis: Sollten Integrale in (1) oder (3) zu kompliziert werden, um sie von Hand zu berechnen, benutzen Sie ein Computeralgebrasystem!

**Aufgabe 12.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie, dass $F$ genau dann die Integrabilitätsbedingung

$$\partial_j F_k(x) = \partial_k F_j(x)$$

für alle $x \in U$ und alle $j,k \in \{1,\dots,n\}$ erfüllt, wenn

$$\langle DF(x)(v), w\rangle = \langle v, DF(x)(w)\rangle$$

für alle $x \in U$ und alle $v,w \in \mathbb{R}^n$ gilt.

**Aufgabe 13.** Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ ist das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x,y) = \big(\lambda x \exp(y), (y+1+x^2)\exp(y)\big)$$

konservativ? Bestimmen Sie für diese Werte ein Potential von $F$.

**Aufgabe 14.** Sei $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| < \pi/2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} y + y\tan^2(x) + \cos(z) \\ \tan(x) \\ -x\sin(z) \end{pmatrix}.$$

Ist $F$ konservativ? Falls ja, geben Sie ein Potential von $F$ an.

**Aufgabe 15.** Für welche stetig differenzierbaren Funktionen $\Phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ist das durch

$$F(x, y, z) = (x, y, \Phi(x, y, z))$$

gegebene Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ konservativ? Bestimmen Sie in diesen Fällen ein Potential.