Übungsserie 5

Abgabe bis zum 30. März
Bewertete Aufgaben: 3,5,7
Weitere empfohlene Aufgaben: 1,2,8

Aufgabe 1. Zeichnen Sie die Menge aller Nullstellen von f und $\partial_y f$ für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$:

(1) $f(x,y) = xy(x+y-1)$;
(2) $f(x,y) = x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$;
(3) $f(x,y) = y^2(1-x) - x^3$;
(4) $f(x,y) = y^2 - x^2(x+1)$.

An welchen Punkten $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ sind die Voraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen erfüllt, und wo nicht?
Gibt es eine abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$, für die es keine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodass $A = f^{-1}(0)$?

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} xy^5 + yu^5 + zv^5 = 1, \\ x^5y + y^5u + z^5v = 1, \end{cases}$$

in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = (0,1,1,1,0)$ nach den Variablen u und v auflösbar ist und bestimmen Sie die Ableitungen $D_{(x_0,y_0,z_0)}u$ und $D_{(x_0,y_0,z_0)}v$ der so definierten impliziten Funktionen $u = u(x,y,z)$ und $v = v(x,y,z)$.

Aufgabe 3. Sei $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$F(x,y,z) = z^3 + 3z + xy - 2.$$

(1) Benutzen Sie in dieser Teilaufgabe den Satz über implizite Funktionen noch nicht. Zeigen Sie, dass für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ genau ein $z \in \mathbb{R}$ mit $F(x,y,z) = 0$ existiert. Welches z gehört zu $(x,y) = (-1,2)$?
(2) Sei $f(x,y) = z$, die in Teilaufgabe eindeutig bestimmte Lösung, so dass

$$F(x,y,f(x,y)) = 0$$

ist. Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist und berechnen Sie den Gradienten $\nabla f(-1,2)$.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie, ob die Gleichung $y^2(1-x) = x^3$ in einer Umgebung des Punktes $(x_0, y_0) = (0,0)$ nach der Variablen x auflösbar ist.

Aufgabe 5. Sei $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und (x_0, y_0) eine Nullstelle von F, so dass $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen (12.3 und 12.4) gibt es eine zweimal differenzierbare Funktion $f : B(x_0, r) \longrightarrow B(y_0, s)$, so dass für alle $x, y \in B(x_0, r) \times B(y_0, s)$ die Gleichung $F(x, y) = 0$ genau dann gilt, wenn $f(x) = y$ ist. Beweisen Sie die Formel für die zweite Ableitung

$$f''(x) = -\frac{(\partial_y F)^2 \partial^2_{xx} F - 2\partial_y F \partial^2_{xy} F \partial_x F + \partial^2_{yy} F (\partial_x F)^2}{(\partial_y F)^3}(x, f(x)).$$

Aufgabe 6. Zeigen Sie, dass für $B \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|B\|_{\mathrm{op}} < 1$ die Matrix $I_m - B$ invertierbar ist mit

$$(1_m - B)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} B^j.$$

Die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} B^j$ ist dabei als Grenzwert der Folge $\left(\sum_{j=0}^{n} B^j\right)_{n=0}^{\infty}$ aufzufassen; ein Teil der Aussage ist also, dass diese Folge unter den getroffenen Annahmen konvergiert. Zeigen Sie, dass die Menge der invertierbaren Matrizen in $\mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ offen ist und dass zu $B \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{R})$ jedes $C \in \mathrm{Mat}_{m,m}(\mathbb{R})$ mit $\|C - B\|_{\mathrm{op}} < \|B^{-1}\|_{\mathrm{op}}^{-1}$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 7. Sei $0 < \rho < 1$, sei $u_0 \in \mathbb{R}$ und sei $X = (C^0([-\rho, \rho]), \|\cdot\|_\infty)$ der vollständige normierte Raum der reellwertigen stetigen Funktionen auf $[-\rho, \rho]$ versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten die Abbildung $T\colon X \longrightarrow X$ gegeben durch

$$T(u)(x) = \int_0^x u(t)\,dt + u_0$$

für alle $u \in X$, $x \in [-\rho, \rho]$.

(1) Zeigen Sie, dass T eine Kontraktion ist, und folgern Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.
(2) Können Sie den Fixpunkt explizit angeben?
Hinweis: Leiten Sie die Fixpunktgleichung nach x ab.

Aufgabe 8. Im Beweis des Satzes über implizite Funktionen kam der Banachsche Fixpunktsatz zur Anwendung. Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen letzteren Satzes notwendig sind, indem sie je ein Beispiel für die folgenden Phänomene angeben:

(1) ein nicht-vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Lipschitz-Kontraktion $f\colon X \longrightarrow X$ ohne Fixpunkt;
(2) ein vollständiger metrischer Raum (X, d) und eine Funktion $f\colon X \longrightarrow X$ mit $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$, jedoch ohne Fixpunkt.

Definition. Seien $k, n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen mit

$$\mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{A\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R} \mid A \text{ multilinear}\}$$

den $\mathbb{R}$-Vekorraum aller multilinearen Abbildungen. Wir erinnern daran, dass eine Abbildung

$$A\colon \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{k\text{-mal}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

multilinear heisst, wenn sie

$$A(x_1, \ldots, x_{i-1}, \lambda x_i + y, x_{i+1}, \ldots, x_k) = \lambda A(x_1, \ldots, x_k) + A(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_k)$$

für alle $x_1, \ldots, x_k, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ und alle $i = 1, \ldots, k$ erfüllt.
Eine multilineare Abbildung $A \in \mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heisst **symmetrisch**, wenn

$$A(x_1, \ldots, x_k) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_k$ und alle $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Eine multilineare Abbildung $A \in \mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heisst **alternierend**, wenn

$$A(x_1, \ldots, x_k) = \mathrm{sgn}(\sigma) A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)})$$

für alle Permutationen $\sigma \in S_k$ und alle $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ gilt.

Aufgabe 9 (Multilineare Abbildungen)**.** Sei $k, n \in \mathbb{N}$ und $\mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}^k, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vekotrraum aller Abbildungen von $\{1, \ldots, n\}^k$ nach $\mathbb{R}$ (mit punktweiser Addition und punktweiser Skalarmultiplikation).

(1) Zeigen Sie, dass $\varphi\colon \mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{Abb}(\{1, \ldots, n\}^k, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$\varphi(A)(i_1, \ldots, i_k) = A(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

ein Vektorraumisomorphismus ist.

Wir bezeichnen mit $\mathrm{Symm}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Menge aller symmetrischen multilinearen Abbildungen und mit $\mathrm{Alt}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ die Menge aller alternierenden multilinearen Abbildungen.

(2) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Symm}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und $\mathrm{Alt}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \subseteq \mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ lineare Unterräume sind.
(3) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Mult}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Symm}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\mathrm{Alt}_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und somit die jeweiligen Dimensionen.

Aufgabe 10 (Lektüre)**.** Es gibt neben dem in der Vorlesung gezeigten Beweises des Satz über implizite Funktionen auch elementare Beweise, welche keine Fixpunkttheorie verwenden. Lesen Sie hierzu [1].

Literatur

[1] Oswaldo Rio Branco de Oliveira, *The Implicit and the Inverse Function theorems: easy proofs*, arXiv:1212.2066