Übungsserie 6

Abgabe bis zum 6. April
Bewertete Aufgaben: 4,8,13
Weitere empfohlene Aufgaben: 1,6,10

Aufgabe 1 (Polarkoordinaten)**.** Die Abbildung $\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\Phi(r,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix}$$

nennt man auch **Polarkoordinaten**. Machen Sie sich mit den Eigenschaften dieser Abbildung vertraut, indem Sie Bilder der Abbildungen $r\longmapsto\Phi(r,\varphi_0)$ und $\varphi\longmapsto\Phi(r_0,\varphi)$ für einige feste $r_0\in(0,\infty)$, $\varphi_0\in(-\pi,\pi)$ skizzieren.
Zeigen Sie, dass $\det(D\Phi(r,\varphi))=r$ gilt, und dass

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(-\pi,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^2\setminus((-\infty,0]\times\{0\})$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 2 (Kugelkoordinaten)**.** Die Abbildung $\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi)\\ r\sin(\theta)\sin(\varphi)\\ r\cos(\theta)\end{pmatrix}$$

nennt man auch **Kugelkoordinaten**. Machen Sie sich mit den Eigenschaften dieser Abbildung vertraut, indem Sie Bilder der Abbildungen $r\longmapsto\Phi(r,\theta_0,\varphi_0)$, $\theta\longmapsto\Phi(r_0,\theta,\varphi_0)$ und $\varphi\longmapsto\Phi(r_0,\theta_0,\varphi)$ für einige feste $r_0\in(0,\infty)$, $\theta_0\in(0,\pi)$, $\varphi_0\in(-\pi,\pi)$ skizzieren.
Zeigen Sie, dass $\det(D\Phi(r,\theta,\varphi))=r^2\sin(\theta)$ gilt, und dass

$$\Phi\colon (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)\longrightarrow\mathbb{R}^3\setminus((-\infty,0]\times\{0\}\times\mathbb{R})$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 3. Sei $n\geq 1$ und es bezeichne

$$\mathbb{S}^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}\mid \|x\|=1\}\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$$

die n-dimensionale Einheitssphäre. Benutzen Sie die glatte Funktion $f:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x_1,\dots,x_{n+1})=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n+1}^2-1$ und den Satz über den konstanten Rang, um zu zeigen, dass $\mathbb{S}^n$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n+1}$ ist. Geht das auch für $n = 0$?

Aufgabe 4 (Stereographische Projektion[1]). Sei $n \geq 1$ und es bezeichne $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die n-dimensionale Einheitssphäre.

(1) Bestimmen Sie $\lambda(x) \in \mathbb{R}$ für jedes $x \in \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ explizit, so dass
$$\lambda(x)(x - e_{n+1}) + e_{n+1} \in \mathbb{R}^n \times \{0\}$$
gilt. Begründen Sie, warum $\lambda > 0$ gilt.

(2) Wir betrachten nun $U = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} < 1\}$, und für $x \in U$ schreibe $P(x)$ für den eindeutigen Schnittpunkt von $\mathbb{S}^n$ mit der Geraden durch x und e_{n+1}. Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\varphi : U \longrightarrow U \qquad \varphi(x) = \lambda(P(x)) \cdot (x - e_{n+1}) + e_{n+1}$$
glatt ist und Bild wirklich in U hat.

(3) Begründen Sie, warum $P(\varphi(x)) = P(x)$ gilt.

(4) Finden Sie eine glatte Inverse zu φ.

(5) Zeigen Sie, dass sich φ zu einer Bijektion $\mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \{0\}$ einschränkt. Und geben sie explizit auch die Inverse an.

Aufgabe 5. Wir betrachten die 3-dimensionale Einheitssphäre $\mathbb{S}^3$ als Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^4$. Geben Sie eine glatte surjektive Abbildung $\Phi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$ an.

Aufgabe 6. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Existieren nichtleere, offene Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ und ein C^1-Diffeomorphismus $f \colon U \longrightarrow V$, so gilt $m = n$.

Aufgabe 7. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, für welche ein $\alpha > 0$ existiert mit
$$\|f(x) - f(y)\|_2 \geq \alpha \|x - y\|_2$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass f ein C^1-Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 8. In dieser Übung möchten wir zeigen, dass die Gruppe
$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \mid a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1\}$$
eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ ist.

(1) Berechnen Sie die Jacobi Matrix der Determinante $\mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

[1] Die stereographische Projektion kommt in der Kartographie zum Einsatz, ist aber etwa auch in der Kristallographie nützlich. Für $n = 2$ kann man Sie in einer eleganten Form mit komplexen Zahlen schreiben - siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Stereographic_projection`

(2) Zeigen Sie, dass $D\det(I_2) = \mathrm{tr}$ ist, wobei $\mathrm{tr} : \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ die Spur $B \longmapsto b_{11}+b_{22}$ bezeichnet.

(3) Sei $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ und $B \in \mathrm{Mat}_{2,2}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\partial_B \det(g)$ existiert und durch $\mathrm{tr}(g^{-1}B)$ gegeben ist.

(4) Zeigen Sie, dass $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ eine Teilmannigfaltigkeit ist und geben Sie ihre Dimension an.

Aufgabe 9. Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und sei $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ so, dass $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \partial_x f(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \\ \partial_y f(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \\ \partial_z f(x_0, y_0, z_0) &\neq 0 \end{aligned}$$

gilt. Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^3$ von (x_0, y_0, z_0) gibt, so dass die Nullstellenmenge $N = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$ als Graph von Funktionen $X(y, z)$, $Y(x, z)$ und $Z(x, y)$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass

$$\partial_y X(y, z) \cdot \partial_x Z(x, y) \cdot \partial_z Y(x, z) = -1 \tag{$\circ$}$$

für alle $(x, y, z) \in N$ gilt.

Hinweis: Die Relation $(\circ)$ heisst **Tripelproduktregel** oder auch **zyklische Kettenregel**. Sie spielt unter anderem in der Thermodynamik eine Rolle, wo x, y und z für Temperatur, Druck und Volumen eines Gases stehen, und f für eine Zustandsgleichung.

Aufgabe 10. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^4 + y^4 + z^4 - 1 \\ x + y + z \end{pmatrix}.$$

Erfüllt $N = f^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang? Ist N eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$? Falls ja, welche Dimension hat sie?

Aufgabe 11. Wir betrachten die Funktion $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_t(x, y, z) = (x - y)^2 + y^2 - t$$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge $N_t = f_t^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang erfüllt. Welche Dimension hat N_t für $t \in T$? Gibt es $t \in \mathbb{R} \setminus T$, sodass N_t dennoch eine Teilmannigfaltigkeit ist?

Aufgabe 12. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = z^3 - \exp(xy)(x^3 - y^2).$$

Erfüllt $N = f^{-1}(0)$ die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang? Ist N eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$? Falls ja, welche Dimension hat sie?

Aufgabe 13. Wir betrachten die Funktionen $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_t(x,y,z) = (z - tx)(x^2 + y^2 - z^2 + 1)$$

für einen reellen Parameter $t \in \mathbb{R}$.

(1) Wir wollen die Mengen $N_t = f_t^{-1}(0)$ untersuchen. Beschreiben Sie die Mengen geometrisch. Versuchen Sie einen Zusammenhang zwischen den Mengen

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - tx = 0\}, \qquad \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0\} \qquad \text{und} \qquad N_t$$

zu erkennen.

(2) Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge N_t die Voraussetzungen des Satzes über den konstanten Rang erfüllt. Welche Dimension hat N_t für $t \in T$? Gibt es $t \in \mathbb{R} \setminus T$, sodass N_t dennoch eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$ ist?

Aufgabe 14. Seien $f, g_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2, \qquad \text{und} \qquad g_t(x,y,z) = x + y - z - t$$

für einen Parameter $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Menge T aller Parameter $t \in \mathbb{R}$, für welche die Menge $N_t = f^{-1}(0) \cap g_t^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Teilmannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 15. Sei $n \geq 1$ und seien $P_1, P_2, \ldots, P_n \in \mathbb{R}[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ Polynome in n Variablen. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$f(x) = (P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x))$$

für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Wir nennen solch eine Abbildung **polynomial**. Zeigen Sie: Falls eine polynomiale Abbildung $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g(x) = (Q_1(x), Q_2(x), \ldots, Q_n(x))$$

mit $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}$ existiert, dann ist die Abbildung $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$J(x) = \det(Df(x))$$

konstant. Geben Sie einige nichttriviale Beispiele für solche Funktionen f und g, mit Polynomen vom Grad > 1.

Aufgabe 16 (Challenge)**.** Sei $n \geq 1$ und $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine polynomiale Abbildung wie in Aufgabe 15. Angenommen die Funktion $J : x \longmapsto \det(Df(x))$ sei konstant und nicht null. Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und dass die zu f inverse Funktion wiederum polynomial ist.

Hinweis: Das ist wirklich schwierig! Überlegen Sie sich, welche vielleicht etwas einfacheren Spezialfälle man betrachten könnte, und versuchen Sie, das Problem in diesen Fällen zu lösen.