Übungsserie 7

Abgabe bis zum 20. April
Bewertete Aufgaben: 3,10,11
Weitere empfohlene Aufgaben: 1,2,6,12

Aufgabe 1. Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = (1, 1, \sqrt{3})$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 2. Gegeben sei die Teilmannigfaltigkeit

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0\}.$$

Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM bei $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 3. (1) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM des Graphen

$$M = \mathrm{Graph}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

von f bei $p = (x, y, f(x, y))$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raumes der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Hinweis: Beschreiben Sie den Graphen als eine Nullstellenmenge einer Funktion.

(2) Geben Sie die Antwort zu Teilaufgabe (1) im konkreten Beispiel von

$$f(x, y) = x^2 \cos(y) + \sin(y)$$

für $(x, y) = (\pi, \frac{\pi}{2})$.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Abbildung $\Phi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = 4 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\vartheta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

welche einen Torus $M = \operatorname{im}\Phi \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrisiert.
Bestimmen Sie eine Basis für den Tangentialraum T_pM im Punkt $p = \Phi(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Bestimmen Sie zudem eine Basis des Raums der Normalenvektoren $(T_pM)^\perp$ an M bei p.

Aufgabe 5. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit. Wir bezeichnen mit $\Gamma(TM)$ die Menge aller Schnitte des Tangentialbündels TM.
Zeigen Sie, dass $\Gamma(TM)$ mit einer $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur versehen werden kann. Finden Sie ausserdem einen Weg, wie man eine Abbildung $f\colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ mit einem Schnitt $s \in \Gamma(TM)$ multiplizieren kann, sodass man wieder einen Schnitt $f \cdot s \in \Gamma(TM)$ erhält.

Aufgabe 6. Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = (x-1)^2 - (y-2)^2.$$

Bestimmen Sie die Extrema von f auf dem Quadrat $Q = [0,2] \times [0,2]$. Diskutieren Sie dabei zunächst separat Extrema auf dem Inneren von Q, auf den einzelnen Kanten ohne die jeweiligen Eckpunkte, und auf den Eckpunkten.

Aufgabe 7. Wir betrachten die kompakte Menge

$$K = \{(x,y) \in [-1,1]^2 \mid y^3 - x^2 = 0\},$$

und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 4y - 3x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf K.

Aufgabe 8. Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf...

(1) ...dem Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$;
(2) ...der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Aufgabe 9. Wir betrachten den abgeschlossenen Ball

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

und die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = 9x^2 + y^2 + 16z^2$. Bestimmen Sie die Extrema von f auf B.

Aufgabe 10. Sei

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \text{ und } z \geq 0\}$$

die obere Hälfte der abgeschlossenen Kugel mit Zentrum 0 und Radius 3 in $\mathbb{R}^3$ und sei $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$f(x,y,z) = x + 2y + z^2.$$

Bestimmen Sie alle globalen Maxima der Funktion f auf H.

Aufgabe 11. Wir betrachten die beiden Mengen

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 1\}$$
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x^2 + 4y^2 = 1\}$$

in $\mathbb{R}^2$.

(1) Zeigen Sie, dass sich die beiden Mengen G und E nicht schneiden.
(2) Berechnen Sie den minimalen Abstand, die zwei Punkte $p \in G$ und $q \in E$ haben können.

Aufgabe 12. Sei $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass zwei Punkte $x, y \in \mathbb{S}^{n-1}$ genau dann maximalen Abstand haben, wenn $x = -y$ gilt. Betrachten Sie hierzu die Funktion $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$(x, y) \longmapsto ||x - y||^2.$$