Übungsserie 8

Abgabe bis zum 27. April
Bewertete Aufgaben: 5,9,13
Weitere empfohlene Aufgaben: 3,4,7,10

Aufgabe 1. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ der Quader $[-1,1]^2$ und $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = 2 - x^2 - y^2$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(1) das zwei-dimensionale Integral
$$\int_Q f(x,y)dxdy$$
mit der Definition über mehrdimensionalen Treppenfunktionen.

(2) die eindimensionalen Integrale
$$F(y) = \int_{-1}^{1} f(x,y)dx$$
und
$$\int_{-1}^{1} F(y)dy,$$
wobei Sie den Hauptsatz der Integralrechnung im eindimensionalen verwenden dürfen.

Die Aufgaben 2, 3 und 4 zeigen, dass wir für die Definition einer Lebesgue Nullmenge sowohl Quader, Würfel als auch Bälle verwenden dürfen (abgeschlossen oder offen spielt keine Rolle).

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *abgeschlossener* (anstatt *offener* wie in der Definition im Skript) Quader gibt, mit
$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(Q_k) < \epsilon.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *abgeschlossener Würfel* (anstatt *abgeschlossener Quader*) gibt, mit
$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(W_k) < \epsilon.$$

Aufgabe 4. (1) Begründen Sie, warum der abgeschlossene Ball

$$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y-x|| \leq r\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Jordan messbar ist (das Volumen werden wir in den kommenden Wochen berechnen.)

(2) Zeigen Sie, dass eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann eine Nullmenge ist, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ eine Familie $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ abgeschlossener *Bälle* (anstatt *Würfel*) gibt, mit

$$N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{vol}(B_k) < \epsilon.$$

Aufgabe 5. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter f wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Hinweis: Sie können die Aufgaben 2,3 und 4 ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 6. Sei $A\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, und $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge. Zeigen Sie, dass das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter f wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 7. Sei $U \subseteq \mathbb{R}$ offen, zusammenhängend und $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass das Bild $f(N) \subseteq \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist, falls $N \subseteq \mathbb{R}$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 8. (Challenge) Finden Sie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so dass $f(\mathbb{R})$ keine Lebesgue Nullmenge ist.

Aufgabe 9. Seien $n \geq 0$, $m \geq 1$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener Quader. Zeigen Sie, dass dann der Graph $\operatorname{graph}(f) \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ einer stetigen Funktion $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 10. Verwenden Sie die vorherige Übung, um zu zeigen, dass jede abgeschlossene k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ für $k < n$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}^n$ ist.

Aufgabe 11. Zeigen Sie, dass die Diagonale $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x = y\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Aufgabe 12. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für jede Jordan-messbare Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ auch die Teilmenge $a + \lambda B = \{a + \lambda b \mid b \in B\}$ Jordan-messbar ist mit Volumen

$$\operatorname{vol}(a + \lambda B) = |\lambda|^n \operatorname{vol}(B).$$

Sie dürfen den die Mehrdimensionale Substitutionsregel *nicht* verwenden.

Aufgabe 13. Eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^n$ heisst eine **Jordan-Nullmenge**, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Familie $Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathbb{R}^n$ offener Quader gibt, so dass

$$J \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} Q_k, \qquad \sum_{k=1}^{m} \mathrm{vol}(Q_k) < \epsilon$$

gilt. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen für eine Teilmenge $J \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) J ist eine Jordan-Nullmenge.
(2) J ist Jordan-messbar und $\mathrm{vol}(J) = 0$.
(3) $\overline{J}$ ist eine beschränkte Lebesgue-Nullmenge.

Finden Sie ausserdem eine Lebesgue-Nullmenge, welche keine Jordan-Nullmenge ist.

Aufgabe 14 (Schreibstil)**.** Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion.
Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung

$$\left| \int_Q f(x)dx \right| \leq \int_Q |f(x)|\, dx$$

gilt, indem Sie den Beweis der entsprechenden Aussage für das eindimensionale Riemann-Integral anpassen (Satz 5.26 im Skript). Achten Sie darauf ausführlich und möglichst sauber zu argumentieren!

Aufgabe 15 (Recherche)**.** Informieren Sie sich mehr über das Banach-Tarski Paradoxon. Eine unterhaltsame (informelle) Quelle: `https://www.youtube.com/watch?v=s86-Z-CbaHA`.

Aufgabe 16 (Geschichte)**.** Henri Lebesgue war Doktorand von Émile Borel an der École Normale Superieure in Paris. Beide haben sich für Mass- und Integrationstheorie interessiert, und viel zu deren Grundlagen und Entwicklung beigetragen. Über mehrere Jahre führten Borel und Lebesgue einen unschönen Disput darüber, wer denn nun Urheber der Masstheorie sei. Ein interessantes Zeitdokument dazu ist Lebesgues [L1918], wo unter anderem

M. Borel a affirmé que la définition de la mesure était cohérente. C'est moi qui l'ai démontré.

(Abschnitt V, ab Seite 243) zu lesen ist.
`http://archive.numdam.org/article/ASENS_1918_3_35__191_0.pdf`

Literatur

[L1918] H. Lebesgue, *Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration*, Annales scientifiques de l'E.N.S. 3e série, tome **35** (1918), p. 191-250