Übungsserie 9

Abgabe bis zum 4. Mai
Bewertete Aufgaben: 1,14,15
Weitere empfohlene Aufgaben: 2,4,6,7,10

Aufgabe 1. Sei $X \subseteq [0,1]$ die Menge aller reellen Zahlen in deren Dezimalbruchentwicklung keine Ziffer 8 vorkommt.[1] Zeigen Sie:

(1) X ist eine Lebesgue Nullmenge,
(2) X ist nicht abzählbar,
(3) $X \times X \subseteq [0,1]^2$ ist eine Nullmenge.

Aufgabe 2. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $B_1, \dots, B_m \subseteq Q$ eine Zerlegung von Q in Jordan-messbare Mengen, d.h. $\bigcup_{i=1}^m B_i = Q$ und $B_i^\circ \cap B_j^\circ = \varnothing$ für alle $i \neq j$.
Zeigen Sie: Eine beschränkte Funktion $f\colon Q \longrightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn für jedes $i = 1, \dots, m$ die Einschränkung $f|_{B_i}\colon B_i \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_Q f(x)\,dx = \sum_{i=1}^m \int_{B_i} f(x)\,dx.$$

Definition. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Eine Funktion $F = (F_1, \dots, F_m)\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heisst Riemann-integrierbar, falls jede Komponente $F_i\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall definieren wir

$$\int_B F(x)\,dx = \left(\int_B F_1(x)\,dx, \dots, \int_B F_m(x)\,dx\right).$$

Aufgabe 3. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass F genau dann Riemann-integrierbar ist, wenn für jede lineare Abbildung $\lambda\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ die Komposition $\lambda \circ F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie weiter, dass

$$\lambda\left(\int_B F(x)\,dx\right) = \int_B \lambda(F(x))\,dx$$

[1] Die Dezimalbruchentwicklung ist nicht immer eindeutig. Zum Beispiel ist $0.8 = 0.79999\dots$. Immer wenn eine Dezimalbruchentwicklung ohne 8 existiert, dann definieren wir, dass die Zahl in X liegt, also zum Beispiel $0.8 \in X$.

gilt, falls $F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ Riemann-integrierbar ist.[2]

Aufgabe 4. Sei $D = [0,2] \times [0,1]$. Berechnen Sie

$$\int_D (x^3 + 3x^2y + y^3)\, d(x,y).$$

Aufgabe 5. Es bezeichne $D \subseteq \mathbb{R}^2$ das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,\pi)$ und (π,π). Berechnen Sie das Integral

$$\int_D x\cos(x+y)\, d(x,y).$$

Aufgabe 6. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 1, y > 1, x + y < 3\}$. Berechnen Sie

$$\int_D \frac{1}{(x+y)^3}\, d(x,y).$$

Aufgabe 7. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x, x + y - 2 < 0\}$. Berechnen Sie

$$\int_D |(x-y)(x+y-2)|\, d(x,y).$$

Aufgabe 8. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2, x^2 < y < 2x^2\}$. Berechnen Sie

$$\int_D (x^3 + y^3)\, d(x,y).$$

Aufgabe 9. Sei $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1, x + y > 0\}$. Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes und der Polarkoordinaten aus Aufgabe 1 von Serie 6 (oder Kapitel 12.13 im Skript) das Integral

$$\int_D \frac{x+y}{\sqrt{2}}\, d(x,y).$$

---

[2] Aufgabe 3 zeigt, dass man die obige Definition von Riemann-integrierbarkeit für Abbildungen $F\colon B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ durch die in der Aufgabe gegebene äquivalente Charakterisierung ersetzen kann. Das Integral $v = \int_B F(x)\, dx \in \mathbb{R}^m$ wird dann definiert als der eindeutige Vektor $v \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\lambda(v) = \int_B \lambda(F(x))\, dx$$

für jede lineare Abbildung $\lambda\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$.

Der Vorteil dieser Definition ist, dass sie Koordinaten-frei ist. Insbesondere kann man sie direkt verallgemeinern zu einer Definition von Riemann Integrierbarkeit für Funktionen $F\colon B \longrightarrow V$, wobei V nur noch ein topologischer Vektorraum ist, welcher nicht mehr notwendigerweise endlich-dimensional ist! Natürlich muss man sich hier fragen, ob Elemente $v \in V$ immer noch eindeutig durch ihre Evaluierung auf allen möglichen (stetigen) linearen Abbildungen $\lambda\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ bestimmt sind. Im Allgemeinen stimmt das nicht. Der Satz von Hahn-Banach garantiert dies jedoch für eine hinreichend grosse Klasse von topologischen Vektorräumen; insbesondere für alle normierten topologischen Vektorräume.

Aufgabe 10. Sei $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < 1, z^2 > x^2 + y^2, z > 0\}$. Berechnen Sie mithilfe des Transformationssatzes und der Kugelkoordinaten aus Aufgabe 2 von Serie 6 (oder Kapitel 12.15 im Skript) das Integral

$$\int_D z \, d(x, y, z).$$

Aufgabe 11. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < x^2 + y^2 < 4\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2 + \cos(x^2 + y^2)} \, d(x, y).$$

Aufgabe 12. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D xy(x^2 + y^2) \, d(x, y).$$

Aufgabe 13. Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1, x + y > 1\}$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_D \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \, d(x, y).$$

Aufgabe 14. (1) Sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und G eine Gerade gegeben durch $ax + by = c$. Geben Sie eine Formel für die Fläche von $D_0 = \{(x, y) \in B \,|\, ax + by < c\}$ in Abhängigkeit von a, b und c an.

Hinweis: Beginnen Sie mit der Geraden $y = c$.

(2) Skizzieren Sie das Gebiet

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x^2 - 2xy + 2y^2 < 1, 5x - 2y < 2\}$$

und berechnen Sie dessen Flächeninhalt $\mathrm{vol}(D)$.

Hinweis: Versuchen Sie das Resultat aus Teilaufgabe (1) zu verwenden. Die expliziten Zahlen könnten etwas unschön werden.

Aufgabe 15. Sei

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < 1, x^2 + z^2 < 1, y^2 + z^2 < 1\}.$$

Zeichnen Sie D und zeigen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(D) = 8(2 - \sqrt{2})$ ist.

Hinweis: Beginnen Sie mit einer anderen Aufgabe, falls Sie bis jetzt noch kein Integral mit dem Transformationssatz berechnet haben. Wenn Sie bereit sind, versuchen Sie Symmetrien in der Menge D zu finden und so die Menge in kleinere gleich grosse Objekte zu teilen.

Aufgabe 16. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ eine symmetrische positiv definite Matrix. Berechnen Sie das Volumen des Ellipsoids

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, Ax \rangle \leq 1\}.$$

Sie dürfen dabei das Volumen ω_n des n-dimensionalen Einheitsballes als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 17. Sei $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\Delta_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq 1\}$ heisst n-dimensionaler **Standardsimplex**. Berechnen Sie das Volumen $\mathrm{vol}(\Delta_n)$ sowie das Integral

$$\int_{\Delta_n} e^{x_1+\cdots+x_n}\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Aufgabe 18. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne ω_n das Volumen des n-dimensionalen Einheitsballes $B(0,1) \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}.$$

gilt. Berechnen Sie $\omega_1, \ldots, \omega_{100}$ mit Computerhilfe. Was erkennen Sie? Hinweis: Zeigen Sie oder benutzen Sie ohne Beweis, dass das eindimensionale Integral

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n(x)\, dx$$

die Gleichung $I_n I_{n-1} = \frac{1}{n} I_1 I_0 = \frac{2\pi}{n}$ erfüllt, und benutzen Sie dies, um eine Rekursionsformel für ω_n herzuleiten.