Frage 1.

(a) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heisst *offen*, falls ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Ist die folgende Menge A offen in $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardmetrik?

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \geq 0, xy > 0 \right\}$$

Begründen Sie explizit mit der Definition aus Teilaufgabe (a).

Lösung:

(a) Eine Teilmenge A eines metrisches Raumes (X, d) ist genau dann offen, wenn es für jeden Punkt $z \in A$ ein $r > 0$ gibt, so dass der Ball $B(z, r) = \{z' \in X \mid d(z, z') < r\}$ komplett in A liegt.

(b) Ja, wir bemerken, dass $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0\}$ ist. Die Menge A ist offen: Sei $(x, y) \in A$ und $r = \min(x, y)$, dann gilt für $(x', y') \in B((x, y), r)$, dass $x' > x - r \geq 0$ und $y' > y - r \geq 0$. Also $(x', y') \in A$.

Punkteverteilung:

(a) 3 Punkte

-1P pro Fehler, z.B. ungenau mit $\forall$ und $\exists$

-2P pro Fehler, falls Aussage stark verändert

Ball muss nicht definiert werden. $0P$ für Definition für Intervalle, $0P$ für Definition über Komplement / Randpunte / Folgen / Urbilder von Funktionen / innerer Punkt.

1P Definition durch Umgebung

(b) 5 Punkte

0P (N) A nicht offen, keine Punkte für Begründung.

2P (J) A offen.

1P (R) Radius richtig.

1P (B1) Aussage: Punkte im Ball sind in A.

1P (B2) Rechnung: Punkte im Ball sind in A.

max 3P (A) Aussage $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0\}$ und wähle Radius klein genug.

Frage 2. Seien $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen.

(a) Die Funktion f heisst *Lipschitz-stetig*, falls ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Seien f und g beide Lipschitz-stetig. Ist es wahr, dass $f + g$ Lipschitz-stetig ist? Falls ja, erklären Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

(c) Seien f und g beide Lipschitz-stetig. Ist es wahr, dass $f \cdot g$ Lipschitz-stetig ist? Falls ja, erklären Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel.

Lösung:

(a) ... es ein $L > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Ja, wir nehmen an, dass es ein $L > 0$ gibt, so dass $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt und dass es ein $L' > 0$ gibt, so dass $|g(x) - g(y)| \leq L'|x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt

$$|f(x)+g(x)-(f(y)+g(y))| \leq |f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)| \leq L|x-y|+L'|x-y| = (L+L')|x-y|,$$

woraus wir folgern, dass $f + g$ Lipschitz-stetig ist mit Lipschitz-Konstante $L + L'$.

(c) Nein: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$ ist Lipschitz-stetig. Die Funktion $f \cdot f$ sendet $x \mapsto x^2$ und ist nicht Lipschitz-stetig.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

1P Bedingungen

1P Formel

(b) 3 Punkte

1P Ja/Nein korrekt

2P Beweis

(c) 3 Punkte

1P Ja/Nein korrekt

2P Beispiel

Frage 3. Berechnen Sie die folgenden Integrale. (Nur die Antwort zählt.)

$$A = \int_3^5 \frac{2}{1-x^2}\,dx, \qquad B = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}}\,dx,$$

$$C = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx, \qquad D = \int_{-2}^2 x^2\Big(1+\sin x\Big)\,dx,$$

Lösung:

(a)

$$\int_3^5 \frac{2}{1-x^2}\,dx = \int_3^5 \frac{1}{1-x}\,dx + \int_3^5 \frac{1}{1+x}\,dx = [-\log(x-1)]_3^5 + [\log(1+x)]_3^5$$

Also $A = \log 2 - 2\log 4 + \log 6$.

(b)

$$B = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x}}\,dx = \left[-\frac{1}{2e^{2x}}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

(c) C ist ein uneigentliches Integral

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,dx = \lim_{R\to\infty}\left[2\sqrt{x+1}\right]_0^R = \lim_{R\to\infty}(2\sqrt{R+1}-2),$$

welches nicht konvergiert, bzw Grenzwert ∞ hat.

(d) Die Funktion $x \mapsto x^2\sin x$ ist ungerade, das Integral über $[-2,2]$ ist daher 0. Uns bleibt

$$D = \int_{-2}^2 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^2 = \frac{16}{3}.$$

Punkteverteilung:

je 2P: keine Teilpunkte

Frage 4. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls ja, berechnen Sie sie. (Nur die Antwort zählt.)

$$A = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin x}{1-2^x}, \qquad B = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x},$$

$$C = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}\sin(\log x)}{x}, \qquad D = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x)^{\frac{1}{2x}}.$$

Lösung:

(a) Wir schreiben $2^x = \exp(x\log(2))$, erhalten

$$\frac{\sin x}{1-2^x} = \frac{x+O(x^2)}{1-(1+x\log(2)+O(x^2))}$$

und schliessen $A = -\frac{1}{\log 2}$.

(b) Wir faktorisieren $\sqrt{x}$ und erhalten

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} = \frac{1}{1-\sqrt{x}},$$

somit ist $B = 1$.

(c) Der Term $\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}$ konvergiert gegen 1 für $x \to 0$. Die Folge konvergiert wegen dem Term $\sin(\log x)$ nicht. Betrachte zum Beispiel die Teilfolge $x_n = \exp(\pi(n+\frac{1}{2}))$.

(d) Wir wechseln von x zu $y = \frac{1}{x}$, also $y \to \infty$ und erhalten

$$\left(\left(1-\frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{1}{2}},$$

welches $D = (e^{-1})^{\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}$ ergibt.

Punkteverteilung:

je 2P: keine Teilpunkte

Frage 5. Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ durch

$$f(x_1, x_2) = (x_1 x_2,\ x_1 + x_2,\ x_1^2).$$

(a) Ist f injektiv?

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}^2$ ist $Df(x)$ injektiv?

Lösung:

(a) Nein, da $f(x, -x) = (x^2, 0, x^2) = f(-x, x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(b)

$$Df(x) = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \\ 2x_1 & 0 \end{pmatrix}$$

ist injektiv für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

1P Antwort

1P Begründung

(b) 6 Punkte

2P $Df(x)$ korrekt

Option 1: 4P Begründung (**-1P** für nur "$x_1 \neq 0$ oder $x_1 \neq x_2$"

Option 2: 2P Begründung korrekt (**1P** für nur "$x_1 \neq 0$")

Frage 6. Seien $a, b > 0$ reelle Zahlen. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

gegebene Teilmenge, und sei $p = (x_0, y_0)$ ein Punkt auf E.

(a) Skizzieren Sie E und beweisen Sie, dass E eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^2$ ist. Sie dürfen alle Resultate aus der Vorlesung benutzen.

(b) Geben Sie einen Tangentialvektor an E im Punkt p an (nicht den Nullvektor).

Lösung:

(a) Die Menge E ist eine Ellipse. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ hat Ableitung

$$Df(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{a^2} & \frac{2y}{b^2} \end{pmatrix},$$

ist also surjektiv für alle $(x, y) \neq (0, 0)$, im Besonderen für alle Punkte in $E = f^{-1}(1)$ Nach dem Satz vom konstanten Rang ist $E \subseteq \mathbb{R}^2$ eine $(2 - 1) = 1$-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(b) Der Tangentialraum an einem Punkt berechnet sich aus dem Kern der Ableitung $Df(x_0, y_0)$. Zum Beispiel

$$v(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 a^2 \\ -x_0 b^2 \end{pmatrix}.$$

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

1P Skizze

1P Definition von f

1P Ableitung $Df(x)$

1P Begründung von $Df(x)$ surjektiv auf E

1P Anwendung Satz vom konstanten Rang

(b) 3 Punkte

3P korrekter Tangentialvektor (**1P** nur Worte)

Frage 7. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = e^{xy}$, und das Vektorfeld $F = \mathrm{grad}(f)$. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ der durch

$$\gamma(t) = (\cos(\pi t^2), t\cos(\pi t))$$

gegebene Pfad von $A = (1,0)$ nach $B = (-1,-1)$.

(a) Geben Sie das Vektorfeld F explizit an.

(b) Schreiben Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma F dt$ als explizites Riemann-Integral (so explizit, dass Sie es beispielsweise in Wolframalpha eingeben können).

(c) Berechnen Sie das Integral. Erklären Sie dabei Ihre Vorgehensweise!

Lösung:

(a) Das Vektorfeld F ist gegeben durch $F(x,y) = e^{xy}(y,x)$.

(b) Wir schreiben

$$\begin{aligned}\int_\gamma F dt &= \int_0^1 \exp(t\cos(\pi t^2)\cos(\pi t)) \left\langle \begin{pmatrix} t\cos(\pi t) \\ \cos(\pi t^2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2\pi t \sin(\pi t^2) \\ \cos(\pi t) - \pi t \sin(\pi t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 \exp(t\cos(\pi t^2)\cos(\pi t)) \Big(-2\pi t^2 \cos(\pi t)\sin(\pi t^2) + \cos(\pi t^2)(\cos(\pi t) - \pi t^2 \sin(\pi t)) \Big)\end{aligned}$$

(c) Mit dem Fundamentalsatz für Parameterintegrale gilt

$$\int_\gamma F dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = e^1 - e^0 = e - 1.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

(b) 4 Punkte

1P Wegintegralformel

1P $F \circ \gamma$ korrekt eingesetzt

2P $\gamma'(t)$ korrekt

(c) 2 Punkte

1P Stammfunktion benutzen

1P Rechnung

Frage 8. Sei $f(z) \in \mathbb{C}[\![z]\!]$ eine Potenzreihe mit komplexen Koeffizienten.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

(a) Der *Konvergenzradius* R von f ist ... (Ergänzen Sie die Definition)

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho = 0$.

(c) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^{2n+1}$$

Lösung:

(a) Der Konvergenzradius ist

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty) \cup \{\infty\},$$

wobei wir die Konvention $\frac{1}{0} = \infty$ und $\frac{1}{\infty} = 0$ benutzen.

(b) Aus zum Beispiel $a_n = n^n$ folgt $R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

(c) Wir haben

$$\sqrt[2n+1]{|a_{2n+1}|} = |1+i|^{\frac{n}{2n+1}} = \sqrt{2}^{\frac{n}{2n+1}}.$$

Darum ist $R = 2^{-\frac{1}{4}}$.

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte

-1P für Fehler beim Betrag $|\cdot|$ oder nicht Erwähnen der Fälle $0, +\infty$.

(b) 3 Punkte

2P Beispiel

1P Begründung

(c) 3 Punkte

3P Korrekte Antwort, $e^{-\frac{1}{4}\log 2}$ wird akzeptiert

max 1P Falls z^{2n+1} falsch behandelt

-1P für Fehler wie $|1+i| = 2$

Frage 9. Sei $V \subseteq \mathbb{R}[x]$ der Vektorraum aller Polynome in der Variablen x mit reellen Koeffizienten vom Grad ≤ 12. Wir möchten V mit einer Norm $\|\cdot\|$ versehen, die wir durch das (konvergierende) Integral

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|e^{-x^2} dx$$

definieren.

(a) Warum erhalten wir damit tatsächlich eine Norm auf V? Erklären Sie was geprüft werden muss, und beweisen Sie anschliessend. Sie dürfen Ihnen bekannte Eigenschaften des Riemann-Integrals ohne weitere Erklärung verwenden.

(b) Ist die Funktion $I : V \to \mathbb{R}$ gegeben durch $I(f) = f(0)$ stetig bezüglich dieser Norm? Begründen Sie.

Lösung:

(a) Die Dreiecksungleichung $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ folgt direkt aus der punktweisen Dreiecksungleichung in $\mathbb{R}$ und der Linearität des Riemann-Integrals.

Die Homogenität $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|$ folgt direkt aus der punktweisen Gleichung $|\alpha f(x)| = |\alpha||f(x)|$ und der Linearität des Riemann-Integrals.

Die Definitheit $\|f\| \geq 0$ und $= 0$ genau dann, wenn $f = 0$ folgt aus dem, dass $e^{-x^2} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daraus dass für stetige Funktionen $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 0$ genau dann, wenn $g = 0$.

(b) Ja, da der Raum der Polynome mit Grad höchstens 12 ein endlichdimensionaler Vektorraum ist und somit alle Normen äquivalent sind. Beachten Sie nun, dass die Abbildung des Polynoms auf ihren konstanten Term stetig ist bezüglich der Standardnorm auf $\mathbb{R}^{13} \cong V$.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte

1P Definition Norm

je 1P pro Eigenschaft

(b) 4 Punkte

-2P falsche Schlussfolgerung

-1P kleine Fehler

Frage 10.

(a) Was besagt der Mittelwertsatz?

(b) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare, nicht beschränkte Funktion. Zeigen Sie, dass ein $x_0 \in (0,1)$ existiert mit $|f'(x_0)| > 9000$.

Lösung:

(a) Seien $a < b$ reelle Zahlen und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf dem offenen Intervall (a,b) differenzierbar ist. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(b) Wir wählen eine beliebige Zahl $a \in (0,1)$. Weil f unbeschränkt ist, gibt es ein $b \in (0,1)$ mit

$$|f(b)| > 9000 + |f(a)|.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein x_0 zwischen a und b, also auch $x_0 \in (0,1)$ so dass

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Daraus folgt mit $|b - a| < 1$ und der umgekehrten Dreiecksungleichung

$$|f'(x_0)| = \frac{|f(b) - f(a)|}{|b - a|} \geq |f(b) - f(a)| \geq |f(b)| - |f(a)| > 9000.$$

Punkteverteilung:

(a) 2 Punkte (Bedingungen **1P** (z.B. diff'bar auf offenem Intervall) und Formel **1P**)

(b) 6 Punkte

2P (D1) Es existieren $a, b \in (0,1)$ mit $|f(b) - f(a)| > 9000$.

- **nur 1P** Ohne Betrag oder ein sinnvolles oBdA oder falls direkt $\exists a, b$ sodass $|f(b) - f(a)| > 9000|b - a|$

2P (H) Herleitung

- **1P** für $|f(b)| > |f(a)| + 9000$
- **1P** für $|f(b) - f(a)| > |f(b)| - |f(a)|$

1P (D2) für $|b - a| < 1$

1P (F) Mittelwertsatz

Frage 11. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $|f'(x)| < (x^2+1)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$?

☐ Ja, und hier ist der Beweis:

☐ Nein, und hier ist das Gegenbeispiel:

Lösung: Ja, nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,dt.$$

Beachte, dass $\int_0^x (t^2+1)^{-1}\,dt = \arctan x$ und darum

$$\int_0^\infty (t^2+1)^{-1}\,dt = \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar ist. Mit dem Majorantenkriterium folgt aus $|f'(x)| < (x^2+1)^{-1}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dass auch $\int_0^\infty f'(t)\,dt$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist. In anderen Worten, der Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^\infty f'(t)\,dt$$

existiert.

Wir folgern, dass auch

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0) + \lim_{x\to\infty} \int_0^x f'(t)\,dt$$

existiert.

Punkteverteilung:
8 Punkte

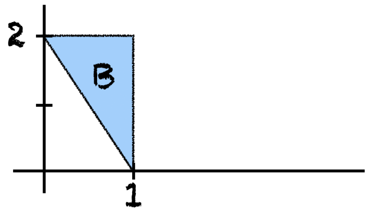
2P korrekte Antwort

2P Fundamentalsatz (Idee **1P**, Anwendung **1P**)

2P Majorantenkriterium auf Integral anwenden

2P Schlussfolgerung (Limes von Majorant **1P**)

Frage 12. Sei B die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ gegeben in folgender Graphik, und sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch $F(x, y) = (x^{12} + y^{12}, \cos(xy))$.



(a) Schreiben Sie die Integrale

$$\int_B \mathrm{div}(F)\, dxdy \qquad\qquad \int_{\partial B} F\, dn$$

als explizite Riemann-Integrale (so explizit, dass Sie sie beispielsweise in Wolframalpha eingeben können), ohne sie auszurechnen.

(b) Ist B glatt berandet? Haben die beiden Integrale trotzdem denselben Wert? Warum? Erklären Sie in Worten.

Lösung:

(a)

$$\int_B \mathrm{div}(F)\, dxdy = \int_0^1 \int_{2-2x}^2 (12x^{11} - x\sin(xy))\, dy\, dx$$

und

$$\int_{\partial B} F\, dn = \int_0^1 \cos(2(1-t))\, dt + \int_0^1 \left(-2t^{12} - 2(2-2t)^{12} - \cos(t(2-2t))\right) dt + \int_0^1 2\left(1 + (2t)^{12}\right) dt$$

(b) Der Bereich B ist nicht glatt berandet. Der Divergenzsatz funktioniert für stückweise glatt berandete Bereiche, die Integrale sind darum gleich.

Punkteverteilung:

(a) 4 Punkte (**je 1P** für Parametrisierung und **je 1P** für korrektes Einsetzen)

(b) 4 Punkte

1P für "nicht glatt berandet" oder "nur stückweise glatt berandet"

1P für "trotzdem selben Wert"(nur möglich falls Punkt vorher auch erhalten)

2P korrekte Begründung: "stückweise glatt berandet" oder "Ecken sind Nullmengen"

Frage 13. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = (x-1)(y-3)^2 \cos x$$

und seien $v = (1, 0)$ und $w = (1, a)$ Vektoren, wobei $a \in \mathbb{R}$ ein fixer Parameter ist. Berechnen Sie

$$C_1 = D^2 f(0)(v, w) \qquad \text{sowie} \qquad C_2 = D^2 f(0)(w, v)$$

Lösung: Die Hesse Matrix bei $(x, y) = (0, 0)$ ist

$$\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Weil $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$ ist, kann man die ersten Terme der Taylor Reihe um $(0, 0)$ direkt rauslesen:

$$f(x, y) = -9 + 6y + 9x - y^2 - 6xy + \frac{9}{2}x^2 + \text{ höhere Terme.}$$

Also ist

$$D^2 f(0)(v, w) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = 9 - 6a.$$

Weil die Bilinearform $Df^2(0)$ symmetrisch ist gilt $C_1 = C_2 = 9 - 6a$.

Punkteverteilung:

(a) 5 Punkte

max 0P falls Hesse Matrix keine 2 Mal 2 Matrix

2P Definition Hesse Matrix

3P Rechnung (**-1P** pro Fehler)

max 4P falls Hesse Matrix nicht bei $(0, 0)$ ausgewertet

(b) 3 Punkte

2P für C_1 oder C_2 korrekt berechnet

1P $C_1 = C_2$ oder Berechnung der anderen Zahl

Frage 14. Sie werden gebeten die reelle Zahl $\log(2)$ als Dezimalbruch bis auf 6 signifikante Nachkommastellen zu bestimmen (Fehler $< 10^{-7}$). Sie entscheiden dies mit Hilfe der konvergierenden Reihe

$$\log(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

zu tun. Wie viele Terme der Reihe müssen Sie in etwa aufsummieren, um die gewünschte Präzision zu erreichen? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Sei $s_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ die Partialsumme der gegebenen Reihe und $s = \log(2)$ der Grenzwert der Folge (s_m). Weil die Reihe alternierend ist, gilt

$$s_{2m-1} + a_{2m} = s_{2m} < s < s_{2m-1}$$

für alle $m > 1$. Der Grenzwert ist zwischen der Folge der ungeraden Glieder s_{2m-1} und der geraden Glieder s_{2m} eingequetscht. Da

$$s_{2m} - s_{2m-1} = a_{2m}$$

gilt und s zwischen diesen beiden Glieder liegt, sollten wir bei der Approximation so langen warten bis $|a_m| \leq 10^{-7}$ liegt.

Also folgt aus

$$|a_m| = \frac{1}{m} \leq 10^{-7},$$

dass $m \geq 10^7$ sein sollte.

Punkteverteilung:

max 2P Richtige Antwort, ohne/falsche Begründung

max 2P Gute Ideen, falsches Resulat

max 4P Richtige Antwort, ungenügende Begründung

max 6P Richtige Antwort, nur kleine Fehler in der Begründung

8P Richtige Antwort mit Begründung, warum der Fehler 10^{-7} eingehalten wird

Bemerkungen:

- Man kann sogar $5 \cdot 10^6$ erhalten, da man zwischen oberer und unterer Schrake hin und her pendelt.
- Verwirrung zwischen 10^{-6} und 10^{-7} ignoriert, falls andererseits korrekt argumentiert wird

Frage 15. Wählen Sie **eines** der folgenden Differentialgleichungsprobleme aus. Geben Sie eine Lösungsmethode für dieses Problem an, und finden Sie alle reellen Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in geschlossener Form, das heisst, alle Integrale sollen ausgerechnet sein! Ignorieren Sie die anderen drei Probleme.

(a) $y'' = -2xy', \quad y(0) = 1,$

(b) $y'(1 + x^2) = xy + x,$

(c) $y'''' = y, \quad y(0) = 1, \quad y$ ist beschränkt.

(d) $y'' = \dfrac{1}{y^2}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$

Ich wähle die folgende Differentialgleichung: $\boxed{}$

Lösung:

(a) Mit $y' = z$ finden wir $z(x) = \exp(-x^2)$. Dann können wir z aber nicht in geschlossener Form berechnen. Lösung bis zum Integral wird trotzdem akzeptiert

(b) Wir lösen zuerst die homogene DGL $y'(1+x^2) = xy$. Mit Separation der Variabeln erhalten wir

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{1+x^2}.$$

Durch integrieren folgt $\log(y) = \frac{1}{2}\log(1 + x^2)$ und wir finden die Lösungen

$$y_H = C\sqrt{1 + x^2}$$

für Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Durch Variation der Konstanten C, also $y = C(x)\sqrt{1 + x^2}$ erhalten wir die Bedingung $C'(x)(1 + x^2)^{\frac{3}{2}} = x$ und erhalten

$$C(x) = \widetilde{C} - \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Wir finden eine Schar (parametrisiert durch $\widetilde{C} \in \mathbb{R}$) von Lösungen

$$y(x) = \widetilde{C}\sqrt{1 + x^2} - 1.$$

(c) Das charakteristische Polynom der DGL ist

$$T^4 - 1 = 0.$$

Seine Nullstellen $1, -1, i, -i$. Wir finden die Lösungen

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$$

für Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4. Da y beschränkt sein soll sind C_1 und C_2 beide 0. Mit $y(0) = 1$ finden wir ausserdem $C_3 = 1$. Wir finden eine Schar (parametrisiert durch $C_4 \in \mathbb{R}$) von Lösungen

$$y(x) = \cos(x) + C_4 \sin(x).$$

(d) Etwas mühsam. Siehe

`https://www.quora.com/Is-there-a-solution-to-the-differential-equation-y-frac-1-y-`

Punkteverteilung: je 8 Punkte

(a) **2P** $y' = z \Rightarrow z' = -2xz$

1P+1P $z'/z = -2x \Rightarrow ln(z) = -x^2 + C$

1P $z = \int C \exp(-x^2)$

1P $y = \int z dx$

2P Schlussfolgerung (es gibt keine geschlossene Lösung)

(b) **Option 1: 2P** $y'/y = x/(1 + x^2)$

2P $y_H = C(1 + x^2)^{1/2}$

2P $C'(x) = -(1 + x^2)^{-1/2}$

2P $y_p = -1$

Option 2: 2P $y'/(y + 1) = x/(1 + x^2)$

2P $ln(y + 1) = ln(1 + x^2)/2 + C$

2P $y + 1 = A(1 + x^2)^{1/2}$

2P $y = A(1 + x^2)^{1/2} - 1$

(c) **1P** $\lambda^4 = 1$

1P $\lambda \in \{1, -1, i, -i\}$

2P $y(x) = A \exp(x) + B \exp(-x) + C \cos(x) + D \sin(x)$

2P $A = B = 0$

1P $C = 1$

1P Schlussfolgerung $y(x) = \cos(x) + D \sin(x)$