D-MATH Numerische Methoden FS 2020
Dr. Vasile Gradinaru
Dr. Adrian Montgomery Ruf

Serie 2

Best before: Di. 03.03. / Mi. 04.03, in den Übungsgruppen
Koordinatoren: Adrian Montgomery Ruf, HG G 54.1, `adrian.ruf@sam.math.ethz.ch`
Webpage: http://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-1662-10L/#exercises

1. *Konvergenzraten der summierten Quadraturregeln*

Wir wollen die folgende Quadraturregeln *zusammengesetzte Mittelpunktregel*, *zusammengesetzte Trapezregel* und *zusammengesetzte Simpsonregel* verwenden, um das Integral

$$I = \int_0^1 f_i(x)\mathrm{d}x$$

von $f_i(x)$, $i = 1, 2$, auf N Teilintervallen oder mit n Funktionsauswertungen zu berechnen. Die beiden Funktionen sind durch

$$f_1(x) := \frac{1}{1+5x^2} \qquad f_2(x) := \sqrt{x}\,. \tag{1}$$

gebeben.

a) Laden Sie das Template `quadrature.py` herunter und implementieren Sie am Anfang des Files die Funktionen `mittelpunkt(f,a,b,N)`, `trapezoid(f,a,b,N)` und `simpson(f,a,b,N)`. Dabei sollen die Funktion `f`, welche integriert werden soll, die untere und obere Grenze `a` und `b` und die Anzahl `N` der Teilintervalle in der zusammengesetzten Regel eingegeben werden. Jede Funktion soll den Wert `I` ausgeben.

b) Schreiben Sie die Funktion `quadrature_error(quadrature_rule, f, exact)`: Dabei sollen die Quadraturregel `quadrature_rule`, die integrierende Funktion `f` und der genaue Wert Ihres Integrals `exact` eingegeben werden. Die Funktion `quadrature_error` soll den Fehler `error` und die Anzahl der Teilintervalle `n_chunks`$= 2^k$, wobei $k \in \{3, \dots, 10\}$, ausgeben. **Tipp**: Die Funktion `enumerate` kann nütlich sein.

c) Implementieren Sie die Funktionen $f_i(x)$, $i \in \{1, 2\}$.

d) Kommentieren Sie die Funktionen `plot_convergence(n_evals, errors, labels, title)` und `convergence_experiment(f, exact, title, filename)` aus. Vervollständingen Sie dann die Funktion `convergence_experiment`: Dabei sind `errors_l` und `n_l` jeweils der Fehler und die Anzahl der Funktionsauswertungen der Quadraturregel `l`, wobei `l`$\in$ {`mp`, `tr`, `si`}.

e) Kommentieren Sie den letzten Teil des Templates aus und testen Sie den Code: Zwei Plots sollen generiert werden, die die Konvergenzraten zeigen. Welche Methode verwendet man sinnvollerweise?

Bitte wenden!

f) Ändern Sie den Code, um einen anderen Plot zu generieren, der die Konvergenz jeder Quadraturregel unter Berechnung des Integrals der Funktion

$$f(x) = x^5(1 - x^4) \tag{2}$$

zeigt.

2. *Homogen geladenes Quadrat in kartesischen Koordinaten*

Betrachten Sie ein quadratisches Gebiet in der x-y-Ebene, welches eine konstante elektrische Ladungsdichte ρ_0 aufweist:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \rho_0, & (x, y) \in [-1, 1]^2 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das elektrostatische Potential φ an einem Punkt (x_p, y_p) ausserhalb des geladenen Quadrats ist dann durch Integration über die geladene Region gegeben

$$\varphi(x_p, y_p) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Der Einfachheit halber setzen Sie $\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} = 1$.

Implementieren Sie die Trapez- und die Simpson-Regel in zwei Dimensionen und berechnen Sie dann $\varphi(x_p, y_p)$ für $x_p = y_p = 2, 10, 20$. Schauen Sie sich den Fehler genau an. Was ist erstaunlich daran? Wie erklären sie sich dieses Verhalten?

Hinweis: Verwenden Sie das Template `potential.py`