D-MATH | Numerische Methoden | FS 2020

Dr. Vasile Gradinaru
Dr. Adrian Montgomery Ruf

Serie 4

Best before: Di. 24.03. / Mi. 25.03, in den Übungsgruppen
Koordinatoren: Adrian Montgomery Ruf, HG G 54.1, `adrian.ruf@sam.math.ethz.ch`
Webpage: `http://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-1662-10L/#exercises`

1. *Beweis der Ordnung impliziten Euler Verfahrens*

Zeigen Sie, dass der Fehler im Impliziten-Euler-Verfahren sich wie $O(h)$ verhält:

$$\|y(t_n) - y_n\| \leq C \cdot h\,,$$

Hierbei ist $y(t_n)$ die exakte Lösung einer gewöhnlicher Differentialgleichung erster Ordnung mit Lipschitz-stetiger rechten Seite, h ist der Zeitschritt, $t_n = n \cdot h$ und y_n ist die numerische Approximation zur Zeit t_n.

Hinweis: folgen Sie den Schritten und Ideen aus der Vorlesung für das explizite Euler Verfahren und für die implizite Mittelpunktsregel.

2. *Trajektorie bei Streuung (Prüfungsaufgabe FS 13)*

Die Trajektorie eines Teilchens bei Streuung an einem Potential $U(x, y)$ wird beschrieben durch:

$$\ddot{\underline{r}} = -\nabla U$$

wobei $\underline{r} = (x, y)^{\mathrm{T}}$ die Teilchenkoordinaten sind und U das Lennard-Jones Potential:

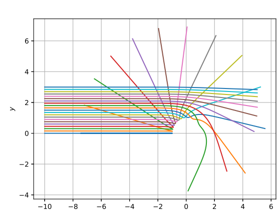
$$U(x, y) = 4\left(\left(\frac{1}{r}\right)^{12} - \left(\frac{1}{r}\right)^{6}\right)$$

ist und $r^2 = x^2 + y^2$.

a) Plotten Sie die Teilchen-Trajektorien, die sich mit dem Störmer-Verlet Verfahren ergeben.

b) Verwenden Sie folgende Anfangsbedingungen und Parameter:

- $\underline{r}(t = 0) = (-10, b)^{\mathrm{T}}$, wobei $b = 0.15, 0.3, 0.45, \ldots, 3$,
- $\dot{\underline{r}}(t = 0) = (1, 0)^{\mathrm{T}}$,
- Zeitschritt $\Delta t = 0.02$,
- Endzeit $T_{\text{ende}} = 15$.



Hinweis: Benutzen Sie das Template `lennard_jones.py`

Bitte wenden!

3. Kernaufgabe: Das N-Körper Problem

Modellierung der Physik

Wir betrachten N Körper im dreidimensionalen Raum. Ihre Dynamik unterliegt einzig der Gravitation, beschrieben durch das Newtonsche Gesetz. Jeder Körper K_i hat eine Position $\underline{q_i} \in \mathbb{R}^3$ und einen Impuls $\underline{p_i} \in \mathbb{R}^3$ sowie eine Masse m_i. Zur einfachen Behandlung der N Körper fassen wir deren Positionen $\underline{q_i}$ und Impulse $\underline{p_i}$ in Vektoren zusammen:

$$\begin{aligned} \underline{q} &:= [\underline{q_1}|\dots|\underline{q_N}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N} \\ \underline{p} &:= [\underline{p_1}|\dots|\underline{p_N}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{3N} \,. \end{aligned}$$

Die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$ lautet dann:

$$\mathcal{H}\left(\underline{q}, \underline{p}\right) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} \underline{p_i}^{\mathrm{T}} \underline{p_i} - G \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|\underline{q_j} - \underline{q_i}\|}$$

Aus dieser Funktion erhält man die Bewegungsgleichungen durch partielles ableiten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{q}}{\partial t} &=: \underline{\dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ \frac{\partial \underline{p}}{\partial t} &=: \underline{\dot{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \,. \end{aligned}$$

Wir finden hier also:

$$\underline{\dot{q}_k} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p_k}} = \frac{\partial}{\partial \underline{p_k}} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{m_i} \underline{p_i}^{\mathrm{T}} \underline{p_i} = \frac{1}{m_k} \underline{p_k}$$

und:

$$\underline{\dot{p}_k} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q_k}} = \frac{\partial}{\partial \underline{q_k}} G \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{m_i m_j}{\|\underline{q_j} - \underline{q_i}\|} = G \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N} \frac{m_i m_k}{\|\underline{q_i} - \underline{q_k}\|^3} \left(\underline{q_i} - \underline{q_k}\right) \,.$$

Schliesslich fasst man noch die Positionen $\underline{q}$ und Impulse $\underline{p}$ in einen einzigen grossen Vektor $\underline{y} := [\underline{q}|\underline{p}]^{\mathrm{T}}$ zusammen.

Mathematisches Modell

Aus obiger Herleitung bekommt man ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\underline{\dot{y}}(t) = \begin{bmatrix} \underline{\dot{q}}(t) \\ \underline{\dot{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{p}} \\ -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \underline{q}} \end{bmatrix} = f\left(t, \underline{y}\right)$$

mit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{6N} \to \mathbb{R}^{6N}$ welches wir nun mit den Polygonzugverfahren aus der Vorlesung lösen wollen.

Siehe nächstes Blatt!

Aufgabenstellung

a) Implementieren Sie mithilfe obiger Formeln die Funktion $f(\underline{y})$ korrekt für N Körper.

Hinweis: Benutzen Sie das `Python` Template `nbody.py`

b) Implementieren Sie eine mit dem velocity-Verlet Verfahren kompatible Version der rechten Seite. Achten Sie dabei auf die Verwendung korrekter Input-Werte.

c) Testen Sie die Implementation am Zweikörperproblem mit folgenden Anfangswerten. Massen: $m_1 = 500$, $m_2 = 1$, Positionen: $\underline{q_1} = \underline{0}$, $\underline{q_2} = (2, 0, 0)$, Impulse: $\underline{p_1} = \underline{0}$, $\underline{p_2} = (0, \sqrt{\frac{Gm_1}{2}}, 0)$ und $G = 1$. Die Endzeit sei $T = 3$ und es sollen 5000 Zeitschritte gemacht werden. Plotten Sie die Bahnen der Körper in der x-y Ebene. Vergleichen Sie die benötigten Rechenzeiten der verschiedenen Methoden.

d) Als nächstes wollen wir ein Dreikörperproblem betrachten. Im Allgemeinen ist das Dreikörperproblem nicht analytisch lösbar. Untersuchen Sie numerisch die Dynamik mit den gegebenen Anfangswerten. Massen: $m_1 = m_2 = m_3 = 1$. Positionen und Impulse:

$$\begin{aligned} \underline{q_1} &= (0.97000436, -0.24308753, 0) & \underline{p_1} &= (0.46620368, 0.43236573, 0) \\ \underline{q_2} &= (-0.97000436, 0.24308753, 0) & \underline{p_2} &= (0.46620368, 0.43236573, 0) \\ \underline{q_3} &= (0, 0, 0) & \underline{p_3} &= (-0.93240737, -0.86473146, 0)\,. \end{aligned}$$

Auch hier nehmen wir $G = 1$. Die Endzeit sei $T = 2$ und es sollen 1000 Zeitschritte mit dem velocity-Verlet impliziten Mittelpunktsregel gemacht werden. Plotten Sie die Bahnen der drei Körper in der x-y Ebene.[a]

e) Abschliessend wollen wir die Bahnen der Planeten[b] des äusseren Sonnensystems untersuchen. Dazu integrieren wir ihre Bewegungsgleichungen ausgehend von konkreten Anfangswerten. Diese Werte sind im `Python` Template zur Aufgabe notiert und alle Einheiten sind im astronomischen Einheitensystem (Längen in A.U., Massen relativ zur Sonne und Zeit in Tagen). Hier nehmen wir $G = 2.95912208286 \cdot 10^{-4}$. Die Endzeit sei $T = 20000$ und es sollen mit jeder Methode 2000 Zeitschritte gemacht werden. Plotten Sie die Planetenbahnen in der x-y Ebene. (Die Berechnung mit den impliziten Methoden dauert eine Weile.)

---

[a] Dieses sehr spezielle Bewegungsmuster ist als *figure-eight pattern* bekannt und detailliert beschrieben im Paper *A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses* von Alain Chenciner und Richard Montgomery, zu finden unter `http://arxiv.org/abs/math/0011268`

[b] Pluto ist offiziell zwar kein Planet mehr, wir wollen ihn hier dennoch berücksichtigen.