Dr. Vasile Gradinaru
Dr. Adrian Montgomery Ruf

# Serie 10

**Best before:** Di. 12.05. / Mi. 13.05, in den Übungsgruppen

**Koordinatoren:** Adrian Montgomery Ruf, HG G 54.1, `adrian.ruf@sam.math.ethz.ch`

**Webpage:** http://metaphor.ethz.ch/x/2020/fs/401-1662-10L/#exercises

**1.** *Gram–Schmidt-Verfahren und Householder-Transformation*

In der Vorlesung haben wir die Householder-Transformation verwendet um die **QR**-*Zerlegung* einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zu bestimmen. Ein weiteres, sehr intuitives Verfahren, das sukzessive die Spalten $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ mit $\underline{a}_i \in \mathbb{R}^m$, von $\mathbf{A}$ orthogonalisiert, ist das Gram–Schmidt-Verfahren. Das Gram–Schmidt-Verfahren ist ein Standardwerkzeug in Beweisen der Linearen Algebra. Die folgenden Algorithmen (in Pseudo-Code) liefern eine **QR**-Zerlegung nach dem *Gram–Schmidt-Verfahren* und dem *modifizierten Gram–Schmidt-Verfahren*:

Gram–Schmidt:

```
for j = 1,...,n do
  v_j = A_{:j}
  for i = 1,...,j-1 do
    R_{ij} = q_i^T a_j
    v_j = v_j - R_{ij} q_i
  end for
  R_{jj} = ||v_j||_2
  Q_{:j} = v_j / R_{jj}
end for
```

Modifiziertes Gram–Schmidt:

```
for j = 1,...,n do
  v_j = A_{:j}
  for i = 1,...,j-1 do
    R_{ij} = q_i^T v_j
    v_j = v_j - R_{ij} q_i
  end for
  R_{jj} = ||v_j||_2
  Q_{:j} = v_j / R_{jj}
end for
```

**a)** Implementieren Sie die beiden Gram–Schmidt-Verfahren in `ortho.py` und verwenden Sie beide Verfahren, um die **QR**-Zerlegung der Matrix $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit den Einträgen:

$$\mathbf{Z}_{ij} = 1 + \min(i, j), \quad 0 \leq i, j < m$$

für $m = 50$ zu bestimmen.

**b)** Vergleichen Sie die Güte der beiden Gram–Schmidt-Verfahren in Bezug auf die Orthogonalität der Spalten von $\mathbf{Q}$.

**c)** Warum sind die Gram–Schmidt-Verfahren im Gegensatz zur Householder-Transformation (siehe `ortho.py`) ungeeignete numerische Methoden zur Berechnung von **QR**-Zerlegungen?

**d)** Schreiben Sie einen Code, der die Matrizen $R_1, \ldots, R_m$ aus der Vorlesung zur Umschreibung des Gram–Schmidt-Verfahrens als Multiplikation mit oberen Rechteckmatrizen berechnet. Verwenden Sie die Matrix $\mathbf{Z}$ aus Aufgabe a) mit $m = 4$ und geben Sie Matrizen $R_k$ und die Skalarprodukte der orthonomisierten Vektoren in jedem Schritt aus.

**Bitte wenden!**

**2.** *Householder-Algorithmus auf die Rotationsmatrix*

Wenden Sie den Householder-Algorithmus auf die Rotationsmatrix $D(\phi)$ aus der Vorlesung an. Geben Sie eine geometrische Interpretation des Ergebnisses.

**3.** *QR-Zerlegung*

Gegeben sei die Matrix A mit den Spaltenvektoren $[1, 1, 1, 1]^T$ und $[-2, 0, 1, 3]^T$.

**a)** Berechnen Sie per Hand die zwei Spiegelungsmatrizen, die die QR-Zerlegungvon $A$ realisieren, und geben Sie die Faktoren $Q$ und $R$ an.

**b)** Berechnen Sie per Hand die QR-Zerlegung von $A$ mittels einer Spiegelung und zwei Drehungen.