

Serie 15

KÖRPERERWEITERUNGEN, KÖRPERERWEITERUNGSGRAD

1. Gegeben seien ein Körper K , eine nichtleere Indexmenge I und für jedes $i \in I$ ein Unterkörper $K_i \subset K$. Zeige: $\bigcap_{i \in I} K_i$ ist ein Unterkörper von K .
2. Zeige: Für jede Körpererweiterung L/K sind äquivalent:
 - (a) $[L/K] = 2$.
 - (b) Es existiert $a \in L \setminus K$ mit $L = K(a)$ sowie $a^2 \in K$ oder $a^2 + a \in K$.
3.
 - (a) Zeige: $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}] = 4$.
 - (b) Zeige: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
4. Ist die Körpererweiterung $K := \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})/\mathbb{Q}$ einfach?
(Sie dürfen ein Computeralgebrasystem benutzen)