

Serie 16

KÖRPERERWEITERUNGEN, MINIMALPOLYNOM UND ALGEBRAISCHE ERWEITERUNGEN

1. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper der endlichen Körpererweiterung L/K . Zeige: Sind $[K_1/K]$ und $[K_2/K]$ teilerfremd, dann sind K_1 und K_2 linear disjunkt über K .
- *2. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K . Gilt die Ungleichung $[K_1K_2/K_2] \leq [K_1/K]$ allgemein im Sinne von Kardinalzahlen?
- *3. Seien K_1 und K_2 Zwischenkörper einer Körpererweiterung L/K . Betrachte den K -Vektorraum $R := K_1 \otimes_K K_2$. Zeige:
 - (a) Es existiert genau eine K -bilineare Multiplikation $R \times R \rightarrow R$ mit $(x_1 \otimes x_2) \cdot (y_1 \otimes y_2) = x_1y_1 \otimes x_2y_2$ für alle $x_1, y_1 \in K_1$ und $x_2, y_2 \in K_2$. Diese macht R zu einem kommutativen unitären Ring.
 - (b) Es existiert genau einen Ringhomomorphismus $\varphi: R \rightarrow L$ mit $\varphi(x_1 \otimes x_2) = x_1x_2$ für alle $x_1 \in K_1$ und $x_2 \in K_2$. Sein Bild ist der von $K_1 \cup K_2$ über K erzeugte Unterring von L .
 - (c) Sei nun L/K endlich und $L = K_1K_2$. Dann ist φ ein Isomorphismus genau dann, wenn K_1 und K_2 linear disjunkt über K sind.
4. Bestimme die Minimalpolynome der folgenden komplexen Zahlen über \mathbb{Q} :
 - (a) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.
 - (b) $\sqrt{3} - \sqrt[3]{3}$.
 - (c) $\sqrt[4]{5} + \sqrt[4]{5}i$.
5. Stelle für $\alpha = \sqrt{-3 + \sqrt{12}}$ die folgenden Zahlen als Polynom in α von möglichst kleinem Grad dar:
 - (a) $(\alpha^3 + 1)(\alpha^3 - \alpha + 4)$.
 - (b) $\frac{1}{\alpha^2 + \alpha + 1}$.
6. Sei $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl. Beweise, dass die Zahlen $\cos(\alpha\pi)$ und $\sin(\alpha\pi)$ algebraisch sind.
7. Sei L/K eine Körpererweiterung und seien $\alpha, \beta \in L$. Zeige: α und β sind genau dann algebraisch über K , wenn $\alpha + \beta$ und $\alpha \cdot \beta$ algebraisch über K sind.
8. Zeige: Eine Körpererweiterung ist endlich genau dann, wenn sie endlich erzeugt und algebraisch ist.