

Serie 17

ALGEBRAISCHE KÖRPERERWEITERUNGEN, KONSTRUKTIONEN MIT ZIRKEL UND LINEAL

- *1. Sei K ein Körper und $L = K(t)$ der rationale Funktionenkörper über K in einer Variablen t .
- (a) Zeige, dass für jeden Zwischenkörper $K \subsetneq K' \subset L$ die Erweiterung L/K' algebraisch und die Erweiterung K'/K transzendent ist.
 - (b) Sei $s = P(t)/Q(t) \in L$ für teilerfremde Polynome $P(X), Q(X) \in K[X]$ mit $Q \neq 0$. Bestimme den Grad der Körpererweiterung $L/K(s)$ in Termen der Grade von P und Q .
 - (c) Zeige, dass die Körperautomorphismen von L , welche auf K die Identität sind, genau die Abbildungen der Form

$$L \rightarrow L, f(t) \mapsto f\left(\frac{at + b}{ct + d}\right)$$

sind für alle Matrizen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(K)$.

2. Zeige, dass ein reguläres Pentagon mit Zirkel und Lineal konstruierbar ist,
- (a) abstrakt mit Hilfe von Körpertheorie.
 - (b) durch Angabe einer expliziten Konstruktion.
3. Ausserirdische, die im \mathbb{R}^n leben, haben dich gebeten, den n -Würfel mit Zirkel und Lineal zu verdoppeln. Für welche Werte von n kannst du das erreichen?
4. Sei $\zeta := e^{2\pi i/p}$ für eine ungerade Primzahl p . Zeige:
- (a) $[\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}] = p - 1$. (*Hinweis*: Eisenstein-Kriterium.)
 - (b) Ist ein regelmässiges p -Eck konstruierbar, so ist p eine *Fermat-Primzahl*, das heisst, $p = 2^{2^k} + 1$ für ein $k \geq 0$.
- *5. Sei $n \geq 1$. Zeige, dass die n -Teilung eines allgemeinen Winkels mit Zirkel und Lineal genau dann möglich ist, wenn n eine Zweierpotenz ist.