Serie 19

Zerfällungskörper, Algebraischer Abschluss, Separable Polynome

*1. Finde für jedes $n \geqslant 1$ ein Beispiel einer Körpererweiterung vom Grad n mit trivialer Automorphismengruppe.

2. (a) Beweise, dass $(X^2 - 2X - 2)(X^2 + 1)$ und $X^5 - 3X^3 + X^2 - 3$ dieselben Zerfällungskörper K über $\mathbb{Q}$ haben, und finde $[K/\mathbb{Q}]$.

   (b) Bestimme den Grad eines Zerfällungskörpers des Polynoms $X^3 + X^2 + 1$ über $\mathbb{Q}$ und über $\mathbb{F}_2$.

3. Zeige: Sind L/K eine algebraische und M/L eine beliebige Körpererweiterung, so ist M ein algebraischer Abschluss von L genau dann, wenn M ein algebraischer Abschluss von K ist.

4. Sei L/K eine beliebige Körpererweiterung. Die Menge $\tilde{K}$ aller über K algebraischen Elemente von L heisst der *relative algebraische Abschluss von K in L*. Zeige:

   (a) Die Menge $\tilde{K}$ ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K, der über K algebraisch ist.

   (b) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist $\tilde{K}$ ein algebraischer Abschluss von K. Insbesondere ist der relative algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{Q}$.

   (c) Gilt die Folgerung in (b) auch im Fall $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$?

   (*d) Sei $\overline{\mathbb{Q}}^+$ der relative algebraische Abschluss von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Zeige $[\overline{\mathbb{Q}}/\overline{\mathbb{Q}}^+] = 2$.

*5. Zeige, dass endliche Körper nicht algebraisch abgeschlossen sind.

6. Sei $h \in K[X]$ ein grösster gemeinsamer Teiler zweier Polynome $f, g \in K[X] \smallsetminus \{0\}$. Zeige: Für jeden Oberkörper L/K ist h auch ein grösster gemeinsamer Teiler von f und g in $L[X]$.

7. Für welche Primzahlen p ist das Polynom $f(X) := X^3 + X + 3 \in \mathbb{F}_p[X]$ separabel?