Serie 21

Separable und normale Körpererweiterungen

1. Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$, und sei L/K eine endliche Körpererweiterung. Zeige: Ist $[L/K]$ teilerfremd zu p, so ist L/K separabel.

2. Zeige: Ein Körper K ist genau dann perfekt, wenn jede algebraische Erweiterung von K separabel ist.

3. Zeige: Für jeden algebraischen Körperturm $M/L/K$ ist M/K genau dann separabel, wenn M/L und L/K separabel sind.

*4. Betrachte eine algebraische Körpererweiterung L/K und setze

$$L' \;:=\; \{a \in L \mid a \text{ separabel über } K\}.$$

Zeige:

(a) L' ist der eindeutige grösste Zwischenkörper von L/K, welcher separabel über K ist.

(b) Ist $L' \neq L$, so ist $p := \mathrm{char}(K) > 0$ und für jedes $a \in L$ existiert ein $r \geqslant 0$ mit $a^{p^r} \in L'$. (Man nennt L/L' dann *rein inseparabel.*)

(c) Ist L algebraisch abgeschlossen, so ist jede separable algebraische Körpererweiterung von L' trivial. (Man nennt L' dann *separabel abgeschlossen.*)

5. Finde ein primitives Element der Erweiterung L von K in den folgenden Fällen:

(a) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)$.

(b) $K = \mathbb{Q}$ und $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{2})$.

(c) $K = \mathbb{C}(t, u)$ mit t, u algebraisch unabhängig über $\mathbb{C}$ und $L = K(\alpha, \beta)$, wobei α eine Nullstelle des Polynoms $X^n - t$ und β eine Nullstelle von $X^m - u$ ist.

6. Ist für folgendes $\alpha \in \mathbb{R}$ die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ normal? Falls nicht, bestimme eine normale Hülle.

(a) $\alpha = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$

(b) $\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{3}}$

*7. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Körper der über $\mathbb{Q}$ mit Zirkel und Lineal konstruierbaren Zahlen. Zeige, dass $L/\mathbb{Q}$ eine normale Erweiterung ist.

*8. Für jede ganze Zahl $n \geqslant 0$ nimm den rationalen Funktionenkörper in einer Variablen $K_n := \mathbb{C}(t_n)$ und betrachte K_{n+1} als Körpererweiterung von K_n über $\mathbb{C}$ via der Identifikation $t_n = t_{n+1}^2 - 2$.

(a) Für welche $n \geqslant 0$ ist die Erweiterung K_n/K_0 normal?

(b) Bestimme für alle $n \geqslant 0$ eine normale Hülle von K_n über K_0.
(*Hinweis:* Untersuche die Körper $L_n := \mathbb{C}(s_n)$ mit $s_n + s_n^{-1} = t_n$ und vergleiche jedes L_n mit L_{n+1} als Erweiterung von K_n.)