Serie 26

abelsche Körpererweiterungen

1. Konstruiere ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 5 mit Galoisgruppe $\cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. Beschreibe die komplexen Nullstellen von f durch Radikale.

2. *(Artin-Schreier Theorie)* Sei K ein Körper der Charakteristik $p > 0$. Sei L/K galoissch mit $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K) = \langle\gamma\rangle$ zyklisch der Ordnung p.

   (a) Bestimme die Jordansche Normalform von γ betrachtet als Endomorphismus des K-Vektorraumes L.

   (b) Zeige: Es existiert ein $a \in L$ mit $\gamma(a) = a + 1$.

   (c) Zeige: Es existiert ein $a \in L$ mit $L = K(a)$ und $a^p - a \in K$.

   Vergleiche Serie 20 Aufgabe 3.

3. Sei L/K eine endliche Körpererweiterung vom Grad m. Für jedes $\alpha \in L$ ist die *Norm* $N_{L/K}(\alpha)$ definiert als Determinante der K-linearen Abbildung $\mu_\alpha\colon L \to L$, $x \mapsto \alpha x$. Zeige:

   (a) Ist $X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ das Minimalpolynom von $\alpha \in L$ über K, so gilt $N_{L/K}(\alpha) = (-1)^m a_0^{m/n}$.

   (b) Die Norm induziert einen Homomorphismus $L^\times \to K^\times$, $\alpha \mapsto N_{L/K}(\alpha)$.

   (c) Ist L/K separabel und $\mathrm{Hom}_K(L, \overline{K}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$ für einen algebraischen Abschluss $\overline{K}$ von K, so gilt $N_{L/K}(\alpha) = \sigma_1(\alpha) \cdots \sigma_m(\alpha)$.

   (d) *(Hilberts Satz 90)* Ist L/K galoissch und $\mathrm{Gal}(L/K)$ zyklisch mit Erzeugendem σ und ist $\alpha \in L^\times$ mit $N_{L/K}(\alpha) = 1$, so ist $\alpha = \sigma(\beta)/\beta$ für ein $\beta \in L^\times$.

*4. *(Irreduzibilität des Kreisteilungspolynoms)* Für jede ganzen Zahl $n \geqslant 1$ ist das n-te Kreisteilungspolynom definiert durch $\Phi_n(X) := \prod(X - \zeta)$, wobei ζ alle Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$ der genauen Ordnung n durchläuft. Zeige:

   (a) Für jedes $n \geqslant 1$ gilt
   $$X^n - 1 \;=\; \prod_{m|n} \Phi_m(X).$$

   (b) Jedes Φ_n ist ein normiertes Polynom in $\mathbb{Z}[X]$.

   Sei nun $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normierter irreduzibler Faktor von Φ_n mit Nullstelle $\xi \in \mathbb{C}$.

(c) Zeige: Für jede nichtnegative ganze Zahl k existiert ein eindeutiges Polynom $g_k \in \mathbb{Z}[X]$ mit $\deg(g_k) < \deg(f)$ und $f(\xi^k) = g_k(\xi)$. Zeige ausserdem, dass die Menge $\{g_k : k \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}\}$ endlich ist.

(d) Sei $a := \sup\{|u| : u \text{ ist Koeffizient eines } g_k\}$. Zeige: Ist $k = p$ prim, so teilt p alle Koeffizienten von g_p. Schliesse daraus, dass für alle $p > a$ das Polynom g_p gleich Null ist. [*Hinweis:* $f(\xi^p) = f(\xi^p) - f(\xi)^p$]

(e) Folgere: Wenn alle Primfaktoren einer ganzen Zahl m grösser als a sind, dann gilt $f(\xi^m) = 0$.

(f) Zeige: Für jede zu n teilerfremde ganze Zahl r gilt $f(\xi^r) = 0$. [*Hinweis:* Betrachte $m := r + n \prod_{p \leqslant a, p \nmid r} p$.]

(g) Zeige, dass das n-te Kreisteilungspolynom Φ_n irreduzibel ist.