

Serie 27

AUFLÖSUNG DURCH RADIKALE, BESTIMMUNG DER GALOISGRUPPE

1. Sei $p > 11$ eine Primzahl. Zeige, dass die Gleichung $X^5 - pX + p = 0$ über \mathbb{Q} nicht durch Radikale auflösbar ist.
2. Seien $\varepsilon, \delta \in \{\pm 1\}$. Zeige, dass jedes Polynom $f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$ vom Grad $n \leq 9$ mit der Eigenschaft $f(X) = \varepsilon X^n f(\delta X^{-1})$ auflösbar durch Radikale ist. (Vergleiche Serie 23 Aufgabe 6.)
3. Sei $f(X)$ ein normiertes Polynom vom Grad 3 in einer Variablen mit reellen Koeffizienten ohne mehrfache Nullstellen, und sei Δ seine Diskriminante. Zeige:
 - (a) Es gilt $\Delta > 0$, falls alle Nullstellen von f reell sind, andernfalls $\Delta < 0$.
 - (b) Falls f genau eine reelle Nullstelle hat, so enthält die Lösungsformel dafür nur reelle Quadrat- und dritte Wurzeln.
 - (c) Im Gegensatz dazu erfordert die Lösungsformel ausgerechnet dann eine dritte Wurzel aus einer nicht-reellen komplexen Zahl, wenn f drei reelle Nullstellen hat (“*Casus irreducibilis*”).
 - * (d) Versuche zu erklären, wieso der Umstand aus (c) unvermeidbar ist, also weshalb die Nullstellen von f , selbst wenn sie reell sind, im Allgemeinen nicht mit reellen Radikalen ausgedrückt werden können.
4. Betrachte ein Polynom der Form $f(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ über einem Körper K der Charakteristik 0. Ziel dieser Aufgabe ist es, explizite Lösungsformeln für die Nullstellen von f in Termen der vier Grundrechenarten sowie von zweiten und dritten Wurzeln zu finden. Schreibe dafür

$$f(X) = (X - a_1)(X - a_2)(X - a_3)(X - a_4)$$

über einem Zerfällungskörper $L = K(a_1, a_2, a_3, a_4)$ von f und setze

$$\left\{ \begin{array}{l} b_1 := a_1 a_2 + a_3 a_4 \\ b_2 := a_1 a_3 + a_2 a_4 \\ b_3 := a_1 a_4 + a_2 a_3 \end{array} \right\} \quad \text{sowie} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 := a_1 + a_2 - a_3 - a_4 \\ c_2 := a_1 - a_2 + a_3 - a_4 \\ c_3 := a_1 - a_2 - a_3 + a_4 \end{array} \right\}.$$

- (a) Zeige, dass nach einer Substitution der Form $X = Y + \alpha$ für ein geeignetes $\alpha \in K$ der Koeffizient von Y^3 verschwindet. Im folgenden nehmen wir daher $a = 0$ an, damit die Formeln einfacher werden.
- (b) Berechne das Polynom $g(Y) := (Y - b_1)(Y - b_2)(Y - b_3)$ durch eine explizite Formel in $\mathbb{Q}[b, c, d][Y]$.

- (c) Gib Lösungsformeln für b_1, b_2, b_3 an aus der Theorie der kubischen Gleichung.
- (d) Berechne c_1^2, c_2^2, c_3^2 durch explizite Formeln in $\mathbb{Q}[b, c, d, b_1, b_2, b_3]$.
- (e) Berechne a_1, a_2, a_3, a_4 durch explizite Formeln in $\mathbb{Q}[b, c, d, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3]$.

Nehmen wir jetzt zusätzlich an, dass f die Galoisgruppe S_4 hat. Zeige dann:

- (f) Das Polynom $g(Y) \in K[Y]$ hat die Galoisgruppe S_3 .
- (g) Der zu der Kleinschen Vierergruppe $H < S_4$ gehörende Zwischenkörper ist $K(b_1, b_2, b_3)$.

5. Bestimme die Galoisgruppe der folgenden Polynome über \mathbb{Q} :

- (a) $f(X) = X^5 + X^3 - 2X + 5$
- (b) $g(X) = X^4 - 2X^3 + 2X + 3$
- (c) $h(X) = X^4 + 3X^3 + 3X + 1$