Ad §6.3: Symmetrische Funktionen

Hauptsatz: Für jedes symmetrische Polynom $f \in R[\underline{X}] := R[X_1,..,X_n]$ existiert ein eindeutiges Polynom $g \in R[\underline{U}] := R[U_1,..,U_n]$ mit

$$f = g(s_1,..,s_n).$$

Ist f homogen vom Grad d, so ist g isobar vom Gewicht d, wobei für alle i gilt $\deg(U_i) = i$.

Beweis: Betrachte die Abbildung

$$\Phi : R[\underline{U}] \longrightarrow R[\underline{X}]^{S_n} := \{f \in R[\underline{X}] \text{ symmetrisch}\}$$
$$g \longmapsto g(\underline{s}) := g(s_1,..,s_n).$$

Für jedes $d \geq 0$ induziert sie eine Abbildung der R-Untermoduln

$$\Phi_d : R[\underline{U}]_{\left(\substack{\text{isobar vom}\\ \text{Gewicht } d}\right)} \longrightarrow R[\underline{X}]^{S_n}_{\left(\substack{\text{homogen}\\ \text{Grad } d}\right)}$$

Es genügt also zu zeigen, dass Φ_d bijektiv ist.

Dafür ordnen wir die Monome $\underline{X}^{\underline{i}} = X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}$, äquivalent ihre Multiindizes $\underline{i} = (i_1,..,i_n)$ umgekehrt lexikographisch: Für alle $\underline{i}, \underline{j} \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ setze

$$\underline{i} > \underline{j} \;:\Longleftrightarrow\; \exists 1 \leq \mu \leq n \; \forall \mu < \nu \leq n : i_\nu = j_\nu \wedge i_\mu > j_\mu .$$

Dies definiert eine Totalordnung auf $(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$. Bsp.: $15422 > 53122$

Lemma: Der kleinste Term in $s_1^{i_1} \cdots s_n^{i_n}$ ist $X_1^{i_1+\ldots+i_n} X_2^{i_2+\ldots+i_n} \cdots X_n^{i_n}$.

Beweis: Der kleinste Term hat den kleinst möglichen Exponenten von X_n, unter diesen den kleinstmöglichen Exponenten von X_{n-1}, usw. In

$$\Big(\sum_{\nu_1} X_{\nu_1}\Big)^{i_1} \Big(\sum_{\nu_1<\nu_2} X_{\nu_1}X_{\nu_2}\Big)^{i_2} \cdots \Big(\sum_{\nu_1<\ldots<\nu_k} X_{\nu_1}\cdots X_{\nu_k}\Big)^{i_k} \cdots$$

ist dies

$$(X_1)^{i_1} \cdot (X_1X_2)^{i_2} \cdots (X_1 \cdots X_k)^{i_k} \cdots \qquad \text{qed.}$$

Surjektivität von Φ_d: Offenbar liegt $f=0$ im Bild. Betrachte also $0 \neq f \in R[\underline{X}]^{S_n}$ homogen vom Grad d. Setze $\underline{j} := \min\{\underline{i} \mid a_{\underline{i}} \neq 0\}$ für $f = \sum_{\underline{i}} a_{\underline{i}} \underline{X}^{\underline{i}}$. Wegen $\deg(f) = d$ kommen dafür nur die endlich vielen $\underline{j}$ mit $j_1 + \ldots + j_n = d$ in Frage. Wir können daher Induktion über $<$ machen.

Da f symmetrisch ist, gilt für alle $\sigma \in S_n$: $a_{\sigma \underline{j}} = a_{\underline{j}} \neq 0$.
Die Minimalität von $\underline{j}$ impliziert also $\sigma \underline{j} \geq \underline{j}$.
Dies bedeutet $j_1 \geq \ldots \geq j_n$.
Setze $f' := f - a_{\underline{j}} \cdot \underbrace{s_1^{j_1 - j_2} \cdots s_{n-1}^{j_{n-1}-j_n} \cdot s_n^{j_n}} \in R[\underline{X}]^{S_n}$ homogen und ...
Nach dem Lemma hat dies den kleinsten Term $\underline{X}^{\underline{j}}$.
Also ist $f' = 0$ oder hat einen höheren kleinsten Term.
Nach Induktionsvoraussetzung für absteigende Induktion können wir also annehmen $f' = g'(\underline{s})$ für ein $g' \in R[\underline{U}]$. Mit
$g := g' + a_{\underline{j}} U_1^{j_1 - j_2} \cdots U_{n-1}^{j_{n-1}-j_n} U_n^{j_n}$ folgt dann $f = g(\underline{s})$.

Injektivität von Φ_d: Da Φ_d additiv ist, genügt es zu zeigen dass $\mathrm{Ker}(\Phi_d) = 0$ ist. Sei also $0 \neq g \in \mathrm{Ker}(\Phi_d)$.
Schreibe $g = \sum_{\underline{i}} b_{\underline{i}} \underline{U}^{\underline{i}}$ und setze $\underline{j} := \min\{\underline{i} \mid b_{\underline{i}} \neq 0\}$.
Für jedes $\underline{i} > \underline{j}$ gilt dann $(i_1 + \ldots + i_n, i_2 + \ldots + i_n, \ldots, i_n)$
$> (j_1 + \ldots + j_n, j_2 + \ldots + j_n, \ldots, j_n)$.
Also kann sich der kleinste Term von $b_{\underline{j}} \underline{s}^{\underline{j}}$ nicht gegen irgendeinen Term von $b_{\underline{i}} \underline{s}^{\underline{i}}$ für $\underline{i} > \underline{j}$ wegheben.
Somit ist $g(\underline{s}) \neq 0$, im Widerspruch zur Annahme. **qed.**

Bsp.: $s_1^2 = \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j x_j\right) = \sum_i x_i^2 + 2 \cdot \underbrace{\sum_{i<j} x_i x_j}_{= s_2}$

$\Rightarrow \sum x_i^2 = s_1^2 - 2 s_2$

Bsp.: $s_1 s_2 = \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_{j<k} x_j x_k\right) = \sum_{j \neq k} x_j^2 x_k + 3 \cdot \underbrace{\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k}_{= s_3}$

$s_1 (s_1^2 - 2 s_2) = \left(\sum_i x_i\right)\left(\sum_j x_j^2\right) = \sum_i x_i^3 + \sum_{i \neq j} x_i x_j^2$

$\Rightarrow \sum x_i^3 = s_1(s_1^2 - 2 s_2) - (s_1 s_2 - 3 s_3) = s_1^3 - 3 s_1 s_2 + 3 s_3$

Bsp.: $\sum x_i^{-1} = \sum_i \frac{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots x_n}{x_1 \cdots x_n} = \frac{s_{n-1}}{s_n}$

Bsp.: $\sum_{i<j} x_i^{-1} x_j^{-1} = \sum_{i<j} \frac{x_1 \cdots \hat{x}_i \cdots \hat{x}_j \cdots x_n}{x_1 \cdots x_n} = \frac{s_{n-2}}{s_n}$

Bsp.: $\sum_i x_i^{-2} = \left(\sum_i x_i^{-1}\right)^2 - 2\left(\sum_{i<j} x_i^{-1} x_j^{-1}\right) = \frac{s_{n-1}^2 - 2 s_{n-2} s_n}{s_n^2}$.