Ad §6.5: Explizite Konstruktion der Zwischenkörper

Sei L/K endlich galoisch mit $\Gamma := \mathrm{Gal}(L/K)$.

<u>Beispiel</u>: Sei $L = K(a_1, \dots, a_n)$ Zerfällungskörper des separablen Polynoms $f(X) \in K[X]$ mit $f(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$.
Sei $\mathrm{char}(K) \neq 2$ und setze

$$\delta := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j).$$

<u>Beh.</u>: Es gilt $\Gamma < A_n \iff \delta \in K$.
Andernfalls ist $K(\delta) = L^{\Gamma \cap A_n}$.

<u>Bew.</u>: f separabel $\Rightarrow \delta \neq 0$.
$\mathrm{char}(K) \neq 2 \Rightarrow -\delta \neq \delta$.

$$\forall \gamma \in \Gamma: \ \gamma(\delta) = \prod_{1 \leq i < j} a_{\gamma i} - a_{\gamma j} = \mathrm{sgn}(\gamma) \cdot \delta.$$

Also ist

$$\Gamma \cap A_n = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\delta) = \delta\} = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma|_{K(\delta)} = \mathrm{id}\} = \mathrm{Gal}(L/K(\delta)).$$

Daraus folgt alles mit dem Hauptsatz der Galoistheorie qed.

<u>Satz</u>: Sei $L = K(a)$ und $\Gamma' < \Gamma$ und setze

$$\sum b_i X^i := F(X) := \prod_{\gamma \in \Gamma'} (X - \gamma(a)) \in L[X].$$

Dann gilt $L^{\Gamma'} = K(b_0, b_1, \dots)$

<u>Bew.</u>: Betrachte den Zwischenkörper $K' := K(b_0, b_1, \dots) \subset L$.
Wegen $L = K(a)$ ist auch $L = K'(a)$. Ausserdem ist $F \in K'[X]$ mit Nullstelle a. Folglich ist das Minimalpolynom $\min_{a,K'}$ ein Teiler von F. Also ist

$$[L/K'] = [K'(a)/K'] = \deg(\min_{a,K'}) \leq \deg(F) = |\Gamma'| = [L/L^{\Gamma'}].$$

Wegen $K' \subset L^{\Gamma'} \subset L$ folgt daraus $K' = L^{\Gamma'}$.

qed.

Satz: $\Gamma = \mathrm{Gal}(L/K)$ betrachtet als Teilmenge des L-Vektorraums aller Abbildungen $L \to L$ ist L-linear unabhängig.

Beweis: Wenn nicht, so existiert eine Relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i = 0$ mit $\lambda_i \in L$, nicht alle Null, und paarweise verschiedenen σ_i. Wähle eine solche Relation mit n minimal. Dann sind alle $\lambda_i \neq 0$. Da es mindestens ein $\lambda_i \neq 0$ gibt, ist $n \geq 1$. Da jedes $\sigma_i \neq 0$ ist, folgt sogar $n \geq 2$. Nach Annahme ist nun $\sigma_1 \neq \sigma_2$. Wähle $a \in L$ mit $\sigma_1(a) \neq \sigma_2(a)$. Für alle $x \in L$ gilt dann

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i(ax) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sigma_i(a) \cdot \sigma_i(x).$$

Es gilt also auch die lineare Relation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \sigma_i(a) \cdot \sigma_i = 0$.
Mit der ursprünglichen Relation zusammen folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot \underbrace{(\sigma_i(a) - \sigma_1(a))}_{\text{Dies ist } \begin{cases} = 0 & \text{für } i=1 \\ \neq 0 & \text{für } i=2 \end{cases}} \cdot \sigma_i = 0$$

Also liefert dies eine echt kürzere nichttriviale Relation, was der Minimalität von n widerspricht. *qed*.

Folge: Für jede Untergruppe $\Gamma' < \mathrm{Gal}(L/K)$ haben wir eine surjektive Abbildung $L \to L^{\Gamma'}$, $x \mapsto \sum_{\sigma \in \Gamma'} \sigma(x)$.

Beweis:* Ersetze K durch $L^{\Gamma'}$ $\Rightarrow$ o.B.d.A. $\Gamma' = \Gamma$. Dann ist die Abbildung K-linear $L \to K$. Nach obigem Satz ist sie ungleich Null. Also ist sie surjektiv. *Sie ist wohldefiniert wegen $\sum_{\sigma \in \Gamma'} \sigma(x) \in L^{\Gamma'}$.