Podukträume

Wir haben $\mathbb{R}^n$ bis jetzt jeweils mit dem n-dimensionalen Lebesquemass betrachtet, welches direkt auf diesem Raum definiert wurde. Jedoch kann man es auch als vereinigen von n Massräumen betrachten. Dies ist insbesondere Notwendig damit Fubinis Theorem Sinn ergibt.
Doch dazu müssen wir zuerst das "Produkt" von Räumen definieren.

Definition 1. *Sei Λ eine Indexmenge und $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Mengen. Dann definieren wir das Produkt wie folgt:*

$$X = \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda := \{\omega : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda | \forall\lambda \in \Lambda : \omega(\lambda) \in X_\lambda\}$$

Bildlich gesprochen besteht der Produktraum aus allen Funktionen von der Indexmenge auf die Vereinigung der Ursprungsräume, sodass der jeweilige Index auf den zu ihm gehörenden Raum abgebildet wird. Sei zum Beispiel $\Lambda = \{1, 2\}$ und $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$. Dann besteht das Produkt $X_1 \times X_2$ aus allen Funktionen von $\{1, 2\}$ nach $\mathbb{R}$. $\omega \in X$ ist also von der Form $\omega(1) = a$ und $\omega(2) = b$, was man auch als Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ verstehen kann.

Nachdem wir jetzt soweit sind definieren wir das Produktmass zweier Masse.

Definition 2. *Seien (X, μ) und (Y, λ) Massräume, dann definieren wir das Produktmass $\mu \times \lambda$ auf $X \times Y$ wie folgt: Sei $S \subseteq X \times Y$*

$$\begin{aligned}(\mu \times \lambda)(S) = \inf \Big\{ &\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\lambda(B_i) \\ &S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \times B_i \\ &A_i \subseteq X; \mu\text{-}messbar \\ &B_i \subseteq Y; \lambda\text{-}messbar \Big\}\end{aligned}$$

Ähnlich wie bei anderen Erweiterungen des Masses benutzen wir die "kleinst" mögliche Überdeckung der Menge als Wert. Diese Definition lässt sich Induktiv auf beliebige endliche Produkte erweitern. Nicht jedoch auf unendliche Produkte, dort muss man dann die Definition anpassen.

jetzt stellt sich natürlich die Frage ob dies mit den verschieden dimensionalen Definitionen des Lebesquemasses kompatibel ist. Sprich gilt $\mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^q = \mathcal{L}^{p+q}$? Nun wenn man sich die Definition des Lebesquemasses in Erinnerung ruft, stellt man fest ,dass auch diese durch eine ähnliche Übereckung von (mehrdimensioalen) Intervallen definiert wurden. Was ja bereits sehr ähnlich zu der Definition des Produktmasses ist.[1]

[1] Dies ist natürlich bei weitem noch kein formaler Beweis. Für diesen betrachte Aufgabe 11.3 in der Serie

Fubini

Ein wichtiger Grund warum wir an dieser Verknüpfung zwischen den verschieden dimensionalen Lebesquemassen interessiert sind, ist der Satz von Fubini.
In erster Linie interessiert uns natürlich das wir die Integrationsreihenfolge vertauschen dürfe. Seien λ und μ Radon Masse auf $X = R^k$ bzw. $Y = R^l$. Dann lässt sich eine summierbare Funktion $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ in summierbare Funktionen unterteilen. I.e. $X \mapsto f(x, \overline{y})$ sowie $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sind summierbar. Natürlich gilt das auch wenn man x und y vertauscht. Beachte jedoch das dies nicht für alle $\overline{y}$ gelten muss. So kann es eine Nullmenge geben auf welcher $x \mapsto f(x, \overline{y})$ nicht einmal messbar ist[2]. Da nun die einzelnen Teile wohldefiniert sind können wir den Hauptteil von Fubini aufschreiben.

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f d(\mu \times \lambda) &= \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu \right) d\lambda \\ &= \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\lambda \right) d\mu\end{aligned}$$

[2]Zum Beispiel: Sei $gX \to \overline{\mathbb{R}}$ nicht summierbar (oder sogar nicht messbar) und $A \subset Y$ von Mass 0. Dann ist $f(x, y) = g(x) \cdot \mathbb{1}_Y(y)$ zwar summierbar.(Die funktion ist immerhin fast überall gleich null. Aber auf A verhält sie sich nicht schön

Guidlines

In dieser Serie geht es darum das ihr euch ein wenig besser mit Produkträumen bekannt macht und einige Eigenschaften zu diesen beweist. Dabei ist es wichtig das ihr dabei nicht vergesst das alles was ihr zu Integralen bis jetzt gelernt habt, natürlich immer noch gilt.

Aufgabe 11.1

Tipps:

- Der Grenzwert von einfachen Funktionen ist Messbar.
- Was passiert mit dem integral wenn ihr x oder y fixiert?

Aufgabe 11.2

Berechnet das Integral auf zwei verschiedene arten und schaut ob ihr eine Verbindung zum zweiten Integral erkennt.

Aufgabe 11.3

In dieser Aufgabe zeigt ihr das die Definition des Lebesquemasse mit der des Produktmasses kompatibel ist.
Tipps

- A und B offen $\implies$ $A \times B$ offen.
- Benutzt dass ihr für lebesquemasse alle messbaren Mengen durch offene Mengen abschätzen könnt.
- Erinnert euch an die definition des Lebesquemasse über das Volumen von Elementaren Figuren.

Aufgabe 11.4

Hier geht es nochmals um L^p Räume.
Tipps:

- (a) wie ist L^∞ definiert?
- verwende den Tipp bei der Definition
- (b) Beachtet das es nicht per se klar ist das der Limes existiert. verwendet also den Lim sup und den lim inf.
- Versucht diese von beiden Seiten abzuschätzen.
- (3) WAS für funktionen sind integrierbar aber sind trotzdem unbeschränkt?